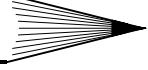


Fourier transform

海大河海系 陳正宗

● Fourier 轉換



若函數 $f(x)$ 為分段連續且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|$ 存在，則以下轉換關係成立

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx & (\text{Fourier 轉換}) \\ f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega & (\text{逆Fourier 轉換}) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $e^{-\omega x}$, $e^{\omega x}$ 為 Fourier 轉換的基底，或稱核函數 (Kernel function).

當 $f(x)$ 為偶函數時

$$\begin{cases} F_c(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega & (\text{逆Fourier 餘弦轉換}) \end{cases} \quad (2)$$

當 $f(x)$ 為奇函數時

$$\begin{cases} F_s(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx & (\text{Fourier 正弦轉換}) \\ f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega & (\text{逆Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \quad (3)$$

Fourier 轉換的 Parseval's 恒等式：

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4)$$

不過為求對稱性，有些書將上述轉換關係定成

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx & (\text{Fourier 轉換}) \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega & (\text{逆Fourier 轉換}) \end{cases} \quad (5)$$

當 $f(x)$ 為偶函數時

$$\begin{cases} F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega & (\text{逆Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \quad (6)$$

當 $f(x)$ 為奇函數時

$$\begin{cases} F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega & (\text{逆Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \quad (7)$$