Fourier transform

海大河海系　　陳正宗

Fourier 轉換

若函數 $f(x)$ 為分段連續且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|$ 存在，則以下轉換關係成立

$$\begin{cases} F(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx & (\text{Fourier 轉換}) \\ f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega & (\text{逆 Fourier 轉換}) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $e^{-\omega x}$, $e^{\omega x}$ 為 Fourier 轉換的基底，或稱核函數 (Kernel function).

當 $f(x)$ 為偶函數時

$$\begin{cases} F_c(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega & (\text{逆 Fourier 餘弦轉換}) \end{cases} \tag{2}$$

當 $f(x)$ 為奇函數時

$$\begin{cases} F_s(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx & (\text{Fourier 正弦轉換}) \\ f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega & (\text{逆 Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \tag{3}$$

Fourier 轉換的 Parseval's 恆等式：

$$\int_{0}^{\infty} f^2(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\, d\omega \tag{4}$$

不過為求對稱性，有些書將上述轉換關係定成

$$\begin{cases} F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\, dx & (\text{Fourier 轉換}) \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega & (\text{逆 Fourier 轉換}) \end{cases} \tag{5}$$

當 $f(x)$ 為偶函數時

$$\begin{cases} F_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega & (\text{逆 Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \tag{6}$$

當 $f(x)$ 為奇函數時

$$\begin{cases} F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx & (\text{Fourier 餘弦轉換}) \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega & (\text{逆 Fourier 正弦轉換}) \end{cases} \tag{7}$$