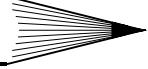


Fourier transform

海大河海系 陳正宗

● Fourier 積分式



Fourier 積分是非週期性函數的 Fourier 展開式。當非週期性函數 $f(x)$ 為分段連續，且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 存在時

$$\int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega = \begin{cases} f(x) & x \text{ 為連續點} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] & x \text{ 為跳躍點} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$, $B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$, 此稱為 Fourier 全三角積分式。

I. 如 $f(x)$ 具對稱性，則 $A(\omega)$ 與 $B(\omega)$ 中有一個為零。

(1) $f(x) = f(-x)$ 時，得 $B(\omega) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad \text{其中 } A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

此稱為 Fourier 餘弦積分。

(2) $f(x) = -f(-x)$ 時，得 $A(\omega) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad \text{其中 } B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

此稱為 Fourier 正弦積分。

II. 複數型 Fourier 積分：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{其中 } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2)$$

III. Fourier 積分之 Parseval's 恆等式：

$$\text{實數型 : } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_0^{\infty} [A^2(\omega) + B^2(\omega)] d\omega \quad (3)$$

$$\text{複數型 : } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4)$$

IV. Fourier 級數展開與 Fourier 積分之不同在於：

- (1) 前者是對週期函數，後者是對無週期或只有一週期之函數；
- (2) 前者是斷續頻相加，後者是連續頻相加。

————— 海大河工系陳正宗 工數 (二) —————

【存檔：c:/ctex/course/math2/foint1.te】 【建檔:Mar./3/'97】