Gibbs phenomenon

海大河海系　　　陳正宗

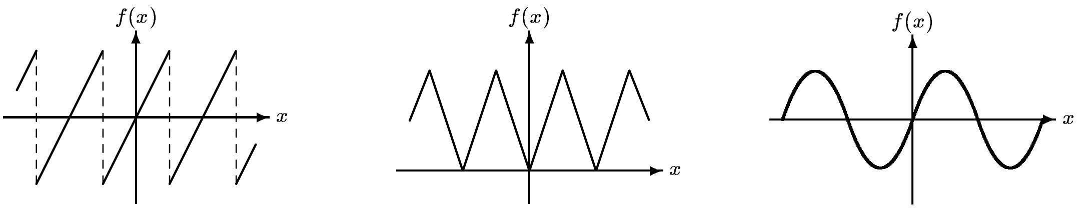
Fourier 級數收斂性與 Gibbs 現象

Fourier 級數的收斂性

1. $f(x)$ 為分段連續函數時 (如下圖)， $f(x)$ 的 Fourier 級數以 $\frac{1}{n}$ 的速度收斂。

2. $f(x)$ 為連續函數而 $f'(x)$ 為分段連續函數時 (如下圖)， $f(x)$ 的 Fourier 級數以 $\frac{1}{n^2}$ 的速度收斂。

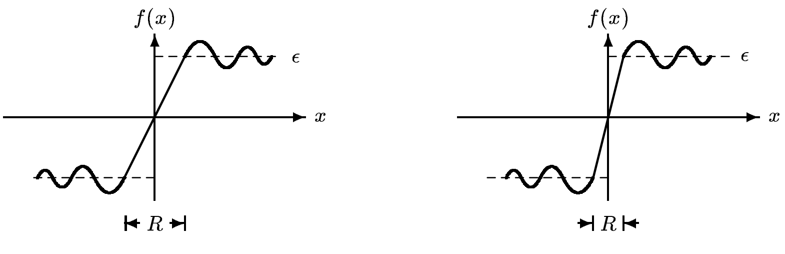
3. $f(x)$ 為連續函數而 $f'(x)$ 亦為連續函數時 (如下圖)， $f(x)$ 的 Fourier 級數以 $\frac{1}{n^3}$ 的速度收斂。



(a)　　　(b)　　　(c)

Gibbs 現象

在 $f(x)$ 的 Fourier 級數展開式中，若只取有限項來近似 $f(x)$ 時，在不連續點的某一鄰域會比原函數值較高，而其範圍會隨所取的項數增加而減少，此種現象稱為 Gibbs 現象 (參見下圖)。



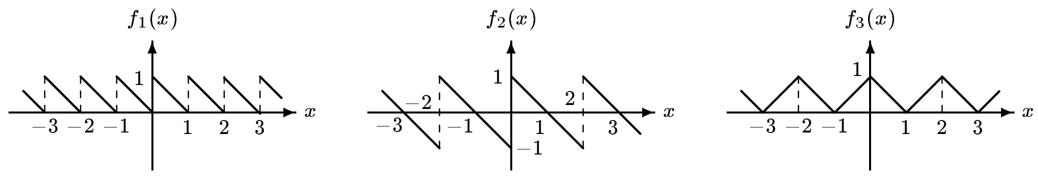
取項數較少時　　　取項數較多時

Gibbs 現象之誤差 ϵ 不會隨所取項數之多寡而改變，但其範圍為 R 會隨項數增加而減少。

例題

設 $f(x) = 1 - x,\ (0 \le x \le 1)$，若將 $f(x)$ 分別視作①一週期函數；②一奇函數；③一偶函數來做 Fourier 級數展開。試比較三者之準確度高低？
(註：不須求出展開式之係數)

解　將此三種情形分別繪圖如下：



1　　2　　3

由於 $f_3(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 內連續且屬均勻收斂，故其收斂速度最快，準確度最高。 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 內皆為分段收斂，而因 $f_1(x)$ 之不連續點為 $f_2(x)$ 之兩倍，故 $f_2(x)$ 比 $f_1(x)$ 之收斂速度慢，準確度差。