

一些發散級數的求和法

余文卿

摘要: 在這演講中, 我們將從有限級數 $S_m(N) = \sum_{k=1}^{N-1} k^m$ 之求和公式及方法中介紹伯努利數 $B_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 與發散級數求和的方法; 特別是針對大家所熟知的里曼 zeta 函數 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, 這函數在偶數正整數與負整數的取值可完全用伯努利數表現出來:

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!},$$
$$\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}.$$

另一方面, 由費馬小定理 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 引出數論上非常重要的庫默同餘式:

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} \pmod{p}.$$

這同餘式用於證明不規則質數有無窮多個, 也粉碎了庫默證明費馬最後定理的美夢。最後我們利用一些發散級數的求和導出一些有關伯努利數的恆等式。

1、連續整數的冪次和

設 m, N 是正整數, 考慮從 1 到 $N-1$ 連續 $N-1$ 個正整數的 m 次方的和

$$S_m(N) = \sum_{k=1}^{N-1} k^m.$$

對 $m = 1, 2, 3$, 很多人都知道, $S_m(N)$ 可寫成 N 的 $m+1$ 次多項式, 首項係數為 $\frac{1}{m+1}$, 而常數項為零:

$$S_1(N) = \frac{N(N-1)}{2},$$
$$S_2(N) = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6},$$
$$S_3(N) = \frac{N^2(N-1)^2}{4}.$$

現對任意的 $m, S_m(N)$ 是否有明顯的表現式呢? 答案當然是有, 且很早就被發現, 現描述其導出過程。設 e 是自然對數的基底, 其定義為

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

指數函數 e^t 的冪級數展開為

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots.$$

因而對任意數 k ,

$$e^{kt} = 1 + kt + \frac{k^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{k^n}{n!} t^n + \dots.$$

令 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 而相加得

$$\sum_{k=1}^{N-1} e^{kt} = N + S_1(N)t + \frac{S_2(N)}{2!} t^2$$

$$+\dots + \frac{S_n(N)}{n!}t^n + \dots。$$

但上面等式的左邊是一等比級數，

$$\sum_{k=1}^{N-1} e^{kt} = \frac{e^{Nt} - 1}{e^t - 1} = \frac{e^{Nt}}{e^t - 1} - \frac{1}{e^t - 1}。$$

因而所得到的初步結果是

$$S_m(N) = m! \times \left\{ \text{函數} \frac{e^{Nt}}{e^t - 1} - \frac{1}{e^t - 1} \right. \\ \left. \text{在 } t = 0 \text{ 展開式中 } t^m \text{ 的係數} \right\}。$$

現剩下的問題是如何展開函數 $\frac{e^{Nt}}{e^t - 1}$ 與 $\frac{1}{e^t - 1}$ ，這也是當年雅各伯努利所走過的路。

2、伯努利數

西元1735年，尤拉發現了正整數的倒數平方和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}。$$

所用的方法是正弦函數之根與係數的關係。函數 $\frac{\sin x}{x}$ 的零位在 $x = \pm n\pi$ ($n \neq 0$)，而可表示為無窮乘積式

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right]。$$

而另一方面，這函數的冪級數展開式為

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots。$$

比較的係數得出

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{3!}，$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}。$$

他持續計算到十二次方的倒數和且進一步推斷

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!}。$$

這 B_{2m} 是一有理數，稱為伯努利數，首度被雅各伯努利 (Jacques Bernoulli, 1654 ~ 1705) 引用於表示 $S_m(N)$ ，其定義式為

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi。$$

比較恆等式

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}，$$

得出 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 所滿足的遞迴定義式為

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \binom{n}{1} B_{n-1} + \binom{n}{2} B_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} B_0, n \geq 2. \end{cases}$$

如

$$B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}。$$

上面的遞迴定義可寫成 $(B+1)^n = B^n$ ，用二項式定理展開 $(B+1)^n$ ，消去 B^n 得

$$\binom{n}{1} B^{n-1} + \binom{n}{2} B^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} B^0 = 0，$$

把上面式子中 B 的上標換成下標即是上面的定義式。這種換上標為下標的手法也用於無窮級數上，特別是用於

$$e^{Bt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n t^n}{n!}$$

上標換成下標後即是伯努利數的定義式。使用這種記號，則

$$\frac{t}{e^t - 1} = e^{Bt}$$

如此 $t = e^{(B+1)t} - e^{Bt}$ ，因而 $(B+1)^n = B^n, n \geq 2$ 。

現回到 $S_m(N)$ 的求和問題上。

$$\begin{aligned} \frac{e^{Nt}}{e^t - 1} - \frac{1}{e^t - 1} &= \frac{1}{t} \left\{ \frac{te^{Nt}}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t - 1} \right\} \\ &= \frac{1}{t} \{e^{Nt}e^{Bt} - e^{Bt}\} \\ &= \frac{1}{t} \{e^{(B+N)t} - e^{Bt}\} \end{aligned}$$

故這函數在 $t = 0$ 展開式中 t^m 的係數為

$$\frac{1}{(m+1)!} \{(B+n)^{m+1} - B^{m+1}\}$$

即

$$S_m(N) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k N^{m+1-k}。$$

注意到 B_m 出現在 $S_m(N)$ 中的最後一項，可明顯看出

$$B_m = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{S_m(N)}{N}。$$

3、里曼 zeta 函數

對 $s > 1$ ，里曼 zeta 函數的定義為

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}。$$

尤拉所得到的式子其實剛好就是 $\zeta(s)$ 在正偶數的取值。這函數可經由解析延拓而定義在複數平面上。現我們問另一問題：這函數

在負整數的取值為何？現我們運用前面的類似手法，由

$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{k^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n k^n}{n!} t^n + \dots，$$

令 $k = 1, 2, \dots, N-1$ ，並相加得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} e^{-kt} &= (N-1) - S_1(N)t + \frac{S_2(N)}{2!} t^2 \\ &+ \dots + \frac{(-1)^n S_n(N)}{n!} t^n + \dots。 \end{aligned}$$

但當 $t > 0$ 時， $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}$ 是一收斂的等比級數，其和是

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}。$$

因而

$$\begin{aligned} \zeta(-m) &= (-1)^m m! \times \left\{ \frac{1}{e^t - 1} \text{在 } t = 0 \right. \\ &\quad \left. \text{展開式中 } t^m \text{ 的係數} \right\} \\ &= (-1)^m m! \cdot \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} \\ &= (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}。 \end{aligned}$$

注意到

$$F(t) = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

是一偶函數，其幕級數展開中不會出現奇數項，這表示 $B_{2k+1} = 0, k = 1, 2, 3, \dots$ ，因而

$$\zeta(-2k) = \frac{B_{2k+1}}{2k+1} = 0。$$

這些負偶數的零點稱為 $\zeta(s)$ 的顯然零點。又 $\zeta(s)$ 滿足泛函方程式

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)。 \end{aligned}$$

特別是

$$\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m} \Leftrightarrow$$

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}.$$

有名的里曼假設(尙未得證)即斷言: $\zeta(s)$ 的其他非顯然零點一定落在直線 $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ 上。

4、費馬的定理

費馬 (Pierre Fermat, 1601 ~ 1665) 是數論上引起爭議最多的人物, 他在邊緣筆記上寫下了費馬最後定理: 對任意正整數 $n > 2$, 不定方程式 $x^n + y^n = z^n$ 沒有全不為零的整數解。西元 1993 年, 美國普林斯頓大學數學系教授威爾斯提出一很長的證明, 企圖在他 40 歲之前一舉拿下數學界的最高獎項-Fields Medal。但事不從人願, 他的證明中被發現有瑕疵; 直到兩年後, 他跟他的學生理查泰勒才提出完整的證明。但這時他已過 40 歲的生日喪失得獎的資格。

費馬在數論上的一有名定理, 被納入代數教科書中, 通稱為費馬小定理。

費馬小定理: 設 p 是質數, a 是與 p 互質的整數, 則

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

定理證明: $a, 2a, \dots, (p-1)a$ 除以 p 的餘數兩兩相異, 且均不為 0, 因而是 $1, 2, \dots, p-1$ 互換次序的另一排列, 故

$$a \cdot 2a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

即

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

$(p-1)!$ 與 p 互質, 可從等式中消去而得出

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

這定理被尤拉重新證明並加以推廣: 若 a 是與正整數 n 互質的整數, 則 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, 其中

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

即是有名的尤拉函數, 表示 $1, 2, \dots, n$ 中與 n 互質的整數個數, 是一乘性函數:

$$(m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

這性質的證明借助於有名的中國餘數定理:

中國餘數定理: 設 m_1, m_2, \dots, m_k 是 k 個兩兩互質的正整數, 對任意 k 個整數 a_1, a_2, \dots, a_k , 底下的同餘式有解

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, x \equiv a_2 \pmod{m_2},$$

$$\dots, x \equiv a_k \pmod{m_k}.$$

當 $k = 2$ 時, 解同餘式

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

相當於求整數 u, v , 使得 $x = a_1 + m_1u = a_2 + m_2v$ 即

$$m_1u - m_2v = a_1 - a_2$$

因 m_1, m_2 互質, 這不定方程式有解。對一般的情形, 先分別解出

$$\begin{cases} y \equiv 1 \pmod{m_1} \\ y \equiv 0 \pmod{m_2 \cdots m_k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \equiv 1 \pmod{m_2} \\ y \equiv 0 \pmod{m_1 m_3 \cdots m_k} \end{cases} \cdots$$

$$\begin{cases} y \equiv 1 \pmod{m_k} \\ y \equiv 0 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_{k-1}} \end{cases}$$

若所得解分別為 y_1, y_2, \dots, y_k 則 $x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_k y_k$ 是所求的解。

庫默 (E. Kummer, 1810 ~ 1893) 幾乎把一生完全耗在費馬的最後定理上, 他發現代數整數中的因式分解理論, 而創出交換環中的理想(ideal), 其目標完全也擺在這定理的證明。他其實證明了部份的定理。

“若 p 是規則質數, 則 $x^p + y^p = z^p$ 沒有顯然的整數解”。

而到底如何判定一質數是規則或不規則呢? 他也創出獨步的判別方法:

p 是規則質數 $\Leftrightarrow p$ 不能整除 B_2, B_4, \dots, B_{p-3} 之一的分子。

他的腹案是先證明規則質數成立, 若有辦法證明不規則質數是有限個, 再個個擊破; 但很不幸地, 他無意中觀察到伯努利數之間的同餘式:

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} \pmod{p}。$$

利用這同餘式可很快證出不規則質數無窮多個。這也使得他的希望破滅, 但這同餘式卻使他在數論上佔著很大的地位。

5、史達特定理與庫默同餘式

觀察到對任意質數 p , 正偶數 m 以及任意整數 a

$$a^{m+p-2} \equiv a^{m-1} \pmod{p}$$

若能把 a 從 1 加到無窮大, 豈不得出

$$\zeta(2-m-p) \equiv \zeta(1-m) \pmod{p}。$$

但

$$\zeta(2-m-p) = -\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1},$$

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}。$$

故庫默所發現的同餘式是當 $p-1$ 不是 m 的因數時,

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_{m+p-1}}{p-1} \pmod{p}。$$

注意到 B_m 充其量只是一有理數, 而可表為分子、分母互質的最簡分數, 史達特定理告訴我們出現於 B_m 分母的質因數是滿足 $p-1$ 可整除 m 的質數, 且

$$B_m = -\sum_{(p-1)|m} \frac{1}{p} + \text{整數},$$

這也表示 B_m 分母的質因數不會重覆。

庫默的同餘式則為

若 p 是奇質數, m 是正偶數且 $p-1$ 不是 m 的因數, 則

$$\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} = \frac{B_m}{m} \pmod{p}。$$

現利用這同餘式證明不規則質數無窮多。

定理: 不規則質數的個數無窮多。

證明 設 p_1, p_2, \dots, p_N 是一組有限多個不規則質數, 現我們要找出一異於這些質數的不規則質數, 取

$$n = r(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_N - 1)$$

其中 r 是一待定的正整數, 因

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{B_{2k}}{2k} \right| = \infty,$$

存在一足夠大的正整數 r , 使得 $\left| \frac{B_n}{n} \right| > 1$, 因而 $\frac{B_n}{n}$ 的分子有一質因數 p , $p - 1$ 一定不是 n 的因數, 否則 p 出現在 B_n 的分母而被約分掉, 故 p 異於 p_1, p_2, \dots, p_N 。令 $n = m + a(p - 1)$, 由

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} \pmod{p},$$

知 p 也整除 B_m 的分子, 但 $m \leq p - 3$, 故 p 不是規則質數。

現有人反問: 到底規則質數的個數是有限或無窮多個? 這又是另一公開的問題。

6、發散級數的修正取值

現我們補充說明得到里曼 zeta 函數 $\zeta(s)$ 在負整數取值的詳細過程, 對任意非負整數 m , 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m$$

是一發散級數且發散到正無窮大。現把這發散級數的第 n 項乘上 $e^{-nt} (t > 0)$ 而成爲

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt}$$

對這修正過的級數, 一定收斂且其近似值爲

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-xt} dx = \frac{m!}{t^{m+1}}.$$

而極限值

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt} - \frac{m!}{t^{m+1}} \right\}$$

一定存在, 這值即定爲 $\zeta(-m)$ 。

另一方面, 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n t^{n-1}}{n!}$$

式子兩邊同時對 t 微分 m 次得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-m} = \frac{m!}{t^{m+1}} + (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \cdot \frac{t^{n-m+1}}{(n-m-1)!}$$

故

$$\begin{aligned} \zeta(-m) &= (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1} \\ &= \left\{ \text{函數} \sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt} \text{在} t=0 \text{之漸近展開式的常數項} \right\} \\ &= \left\{ \text{函數} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \text{在} t=0 \text{之漸近展開式的} t^m \text{常數項} \right\} \times \{(-1)^m m!\} \end{aligned}$$

上面的處理手法也適用於一般的 zeta 函數, 特別是由多項式所定出的 zeta 函數, 如

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=1}^{\infty} (n_1 + n_2 + \cdots + n_r)^{-s}$$

在負整數的取值為

$$(-1)^n m! \times \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=1}^{\infty} e^{-(n_1+n_2+\cdots+n_r)t} \right. \\ \left. = \left(\frac{1}{e^t-1} \right)^r \text{在 } t=0 \text{ 之漸近展開式中 } t^m \right. \\ \left. \text{的係數} \right\}.$$

7. 伯努利恆等式

凡有關伯努利數之間的關係式通稱為伯努利恆等式。這裡介紹一導出等式的新方法。

考慮級數

$$Z(s) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_1 + n_2)^{-s}.$$

組合 $n_1 + n_2$ 為另一新變數 n 時, 這級數為

$$Z(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} nn^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ = \zeta(s-1) - \zeta(s).$$

因而這級數在負整數 $s = 2 - 2n (n > 1)$ 的取值為

$$Z(2-2n) = \zeta(1-2n) - \zeta(2-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

另一方面, 我們可以透過前面討論過的方法求 $Z(2-2n)$, 由

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-(n_1+n_2)t} = \frac{1}{(e^t-1)^2},$$

知

$$Z(2-2n) = (-1)^{2n-2} (2n-2)! \times \left\{ \frac{1}{(e^t-1)^2} \text{展開式中 } t^{2n-2} \text{的係數} \right\}.$$

又由

$$\left(\frac{t}{e^t-1} \right) \left(\frac{t}{e^t-1} \right) = e^{Bt} e^{Bt} = e^{(B+B)t},$$

知這係數為

$$\frac{(B+B)^{2n}}{(2n)!}.$$

亦即

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} B_{2k} B_{2n-2k}.$$

因而得出恆等式

$$\frac{1}{2n(2n-1)} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} B_{2k} B_{2n-2k} \\ = -\frac{1}{2n} B_{2n}.$$

而可化簡為

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_{2k} B_{2n-2k} = -(2n+1) B_{2n}.$$

這又是尤拉的另一傑作。

參考資料

1. Bruce C. Berndt, Ramanujan's notebooks, I, II, Springer-Verlag, 1985, 1989.
2. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, Number Theory, Academic Press, 1966.
3. Minking Eie and K. F. Lai, Bernoulli identities, Part I and Part II, Revista Matematica Iberoamericana, 14(1998), 167-213.
4. Andre Weil, Number Theory, Birkhauser, 1983.

—本文作者任教於國立中正大學數學系—