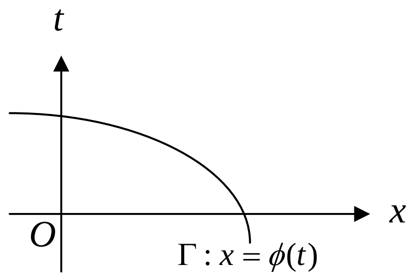
班級：______________學號：_______________姓名：______________

海洋大學河海工程學系 2005 工程數學(四)期中考(Open Book)

1. 如果 $u=u(x,t)$ 是方程式 $u_t+a(u)u_x=b(u)$，在曲線 $\Gamma: x=\phi(t)$ 兩邊的解(即 $u(x,t)$ 在 Γ 兩邊各自 continuously differentiable, 且滿足上面方程式), 且 $u(x,t)$ 是 continuous



證明：$\phi(t)$ 滿足常微分方程式 $\dfrac{d\phi}{dt}=a(u(\phi(t),t))$ 其中 $a(u)$, $b(u)$ 是兩個給定的函數。 (20%)

2. 考慮 Cauchy problem

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = 0 \\ u(\cos\theta,\sin\theta)=g(\theta),\ -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ u(0,y)=f(y),\ -1\le y\le 1 \end{cases}$$

(1) 是否對所有 $f(y)$, $g(\theta)$ 皆有解 ? (10%)

(2) 如果 (1) 不對, $f(y)$ 及 $g(\theta)$ 要滿足什麼條件,上面問題才有解?又有多少解？ 是否對任何 $f(y)$ 及 $g(\theta)$，此 Cauchy problem 皆無解? (10%)

3. Given $u_x u_y = 1$, find the Monge cone at $(0,0,0)$. Try any method you can

for $u_x u_y = 1$ subject to Cauchy data $u(s,s)=\sqrt{2}\,s$. (20%)

4. Solve $F(x,y,u,p,q)=p^2+q+u=0$ subject to the Cauchy data $u(s,0)=s$. (20%)

5. Solve $xu_x+yu_y=1+y^2$ subject to the $u(x,1)=1+x$. (20%)

6. 考慮方程式 $u^2(1+u_x^2+u_y^2)=1$, $u=u(x,y)$ 。

(a) 求它的 field of Monge cones. (10%)

(b) 求一解滿足下面 Cauchy data: $x=s,\ y=s,\ z=\dfrac{1}{2}s$ 。

問： s 要滿足什麼條件才使 $(s,s,\dfrac{1}{2}s)$ 是 non-characteristic. (10%)