偏微分

劉太平

1. 引言

中學時代覺得代數難懂, 主要是因爲小學時分數運算不夠熟。大一修微積分有困難, 那是代數生疏的緣故。「數學傳播」這次專題偏微分方程 (Partial Differential Equations, PDE), 這是連續數學的核心, 在科學上有廣泛的應用, 同時也是公認的一門困難的學科。PDE 難, 是因爲微積分是數學中最難的一門。單變數微積分雖然起源在古希臘之前, 但它的成熟卻是在文藝復興之後, 而多變數微積分卻要等到十九世紀才得心應手。

本文的目的在溫習微積分的一些基本概念, 我們藉由自然現象的描述, 來說明這些概念的意涵。這是和微積分及偏微分方程的發展歷史相吻合, 因此這裡的說明和一般教科書不盡相同。

2. Continuum Mathematics

要描述一個量的變化, 我們可以分爲兩種情況: 連續 (Continuum) 和離散 (Discuete)。我們舉個生物上的例子: 假設 $X(t)$ 是某種生物在時間 t 的總量。Discrete Mathematics 適用於多數大型哺乳類, 如熊、象等。這些動物每年有固定的生產季節, 要研究他們的總數 $X(t)$, 以每年一次固定季節點數爲宜, $t = 1, 2, \ldots$。總數的變化是 $\Delta X(n) = X(n) - X(n-1)$, 而生殖率爲

$$C = \frac{\Delta X(n)}{X(n-1)}.$$

這是 Discrete Mathematics。

多數微小生物以及人類, 沒有固定的生產季節。他們的總數 $X(t)$ 隨時間不斷的變化, $t \in \mathbb{R}$ 實數, 是 Continuum Mathematics。這時要討論變化就要引進微分這個概念:

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t}.$$

這是某生物總數的變化率。這個變化率取決於許多的因素, 像糧食, 氣候等等。其中最根本的考慮是: 目前的總數 $X(t)$ 越大, 能生殖的個體也越多, 那麼它的增長也越快:

$$C = \frac{X'(t)}{X(t)} > 0.$$

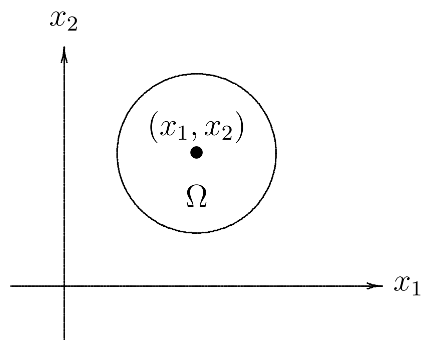
這個正數 C 就是生殖率。把 C 取爲常數便得到最簡單自然的常微分方程 (ordinary differential equations, ODE):

$$X'(t) = CX(t).$$

常微分方程就是含有微分的方程。

現在我們來看偏微分方程。在討論某種生物量時, 生物在各個地區的分佈自然是重要的。這個分佈可以用密度來量。假設某種生物是分佈在二維空間 $\vec{x}=(x_1,x_2)$, 它在一個位置 (x_1,x_2), 時間 t 的密度是

$$u(x_1,x_2,t)=\lim_{|\Omega|\to 0}\frac{X(\Omega,t)}{|\,\Omega\,|},$$



這裡 Ω 是空間裡的一個小區域, $|\,\Omega\,|$ 是它的面積, 而 $X(\Omega,t)$ 代表生物在 Ω 區內的總量。密度 $u(x_1,x_2,t)$ 隨時間 t 和地點 (x_1,x_2) 而變, 因此它的變化就不是單一微分可以理解了。如果我們站在一個地點, 這時 (x_1,x_2) 固定了, 那麼密度隨時間的變化是

$$\begin{aligned}u_t(x_1,x_2,t)&=\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x_1,x_2,t+\Delta t)-u(x_1,x_2,t)}{\Delta t},\end{aligned}$$

這是 $u(x_1,x_2,t)$ 對 t 的偏微分。其次我們在一個時刻朝 x_1 方向看, 也就是 t 和 x_2 固定, 那麼密度的變化是

$$\begin{aligned}u_{x_1}(x_1,x_2,t)&=\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\\&=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{u(x_1+\Delta x_1,x_2,t)-u(x_1,x_2,t)}{\Delta x_1},\end{aligned}$$

是 u 對 x_1 的偏微分。同理, 在一個固定時間, 密度在 x_2 方向的變化是 u 對 x_2 的偏微分

$$\begin{aligned}u_{x_2}(x_1,x_2,t)&=\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\\&=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{u(x_1,x_2+\Delta x_2,t)-u(x_1,x_2,t)}{\Delta x_2}.\end{aligned}$$

這些是一階偏微分。我們可以一再的取偏微分而得到高階偏微分。在這裡要注意到一個基本的事: 偏微分的次序是可以互相交換的, 譬如:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial t}&=\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial t\partial x_2}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x_1\partial x_2}\\&=u_{x_1x_2t}.\end{aligned}$$

現在我們可以定義偏微分方程 (PDE) 了, 它就是含有偏微分的方程式。下面我們列舉幾個最基本的 PDE, 這裡 $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$, 而我們用了一個符號

$$\begin{aligned}&\Delta u\equiv u_{x_1x_2}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}\\&\qquad\text{(Laplacian operator).}\\&a_1u_{x_1}+a_2u_{x_2}+\cdots+a_nu_{x_n}+a_0u_t=0\\&\qquad\text{(transport equation),}\\&u_{tt}=C^2\Delta u\quad\text{(wave equation),}\\&u_t=K\Delta u\quad\text{(heat equation),}\\&\sqrt{-1}\hbar u_t=\Delta u\quad\text{(Schröding equation),}\\&\Delta u=0\quad\text{(Laplace equation).}\end{aligned}$$

這些 PDE 我們會在下面的章節, 由自然現象推導出來, 也會對它們做初步的分析。

3. Directional Derivative

如前所述, 一個函數 $u(x_1,x_2)$ 的偏微分 u_{x_1} 是 u 在 x_1, 也就是 (1,0) 方向的變化; u_{x_2} 是 u 在 (0,1) 方向的變化。u 在一般方向 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ 的變化就叫 directional derivative:

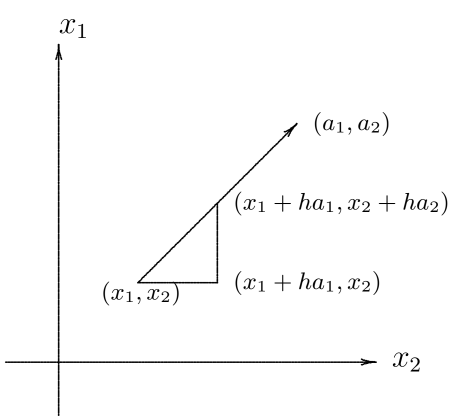
$$\begin{aligned}&D_{\vec{a}}u(x_1,x_2)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2+ha_2)-u(x_1,x_2)}{h}.\end{aligned}$$

我們可以把 directional derivative 拆成往 (1,0) 方向走 ha_1 步, 再往 (0,1) 方向走 ha_2 步:

$$\begin{aligned}&D_{\vec{a}}u(x_1,x_2)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2)-u(x_1,x_2)}{h}\\&+\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2+ha_2)-u(x_1+ha_1,x_2)}{h}\end{aligned}$$

在第一個極限裡 x_2 是固定的, 我們取 $\Delta x_1=ha_1$ 得

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2)-u(x_1,x_2)}{h}\\&=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{u(x_1+\Delta x_1,x_2)-u(x_1,x_2)}{\Delta x_1}\cdot a_1\\&=u_{x_1}(x_1,x_2)\cdot a_1,\end{aligned}$$



同樣的, 取 $\Delta x_2=ha_2$,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2+ha_2)-u(x_1+ha_1,x_2)}{h}\\&=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{u(x_1+ha_1,x_2+\Delta x_2)-u(x_1+ha_1,x_2)}{\Delta x_2}\cdot a_2\\&=[\lim_{h\to 0}u_{x_2}(x_1+ha_1,x_2)]\cdot a_2\\&=u_{x_2}(x_1,x_2)\cdot a_2,\end{aligned}$$

而 directional derivative 成爲偏微分的線性組合:

$$\begin{aligned}&D_{\vec{a}}u(x_1,x_2)\\&=a_1u_{x_1}(x_1,x_2)+a_2u_{x_2}(x_1,x_2).\end{aligned}$$

如果一個函數有多個自變量 $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=u(\vec{x})$, 那麼 u 在 $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的 directional derivative 是

$$\begin{aligned}&D_{\vec{a}}u(\vec{x})\\&=a_1u_{x_1}(\vec{x})+a_2u_{x_2}(\vec{x})+\cdots+a_nu_{x_n}(\vec{t})\end{aligned}$$

如果我們引進 gradient 符號:

$$\nabla u(\vec{x})\equiv(u_{x_1}(\vec{x}),u_{x_2}(\vec{x}),\ldots,u_{x_n}(\vec{x})),$$

再用內積符號

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

那麼 directional derivative 方程可簡寫成:

$$D_{\vec{a}}u(\vec{x})=\nabla u(\vec{x})\cdot\vec{a}.$$

Directional derivative 是一個自然有用的概念, 我們舉個漂浮物質, 如污染油質, 隨著水流漂動的例子: 假定水的流速是 $\vec{v}=(v_1,v_2)$, 漂浮物質的密度爲 $u(\vec{x},t)=$

$u(x_1,x_2,t)$。如果漂浮物質不擴散, 只隨著水流漂移, 換句話說, 隨著水流, 漂浮物的密度是不變的:

$$\frac{d}{dt}u(x_1+v_1t,x_2+v_2t,t)=0.$$

這裡水的流速 (v_1,v_2) 假定為常向量 (a_1,a_2), 所以現在 $t=0$ 的位置是 (x_1,x_2), 那麼隨著流水, 以後的位置便是 (x_1+v_1t,x_2+v_2t)。上式是 directional derivative, 由前式得

$$a_1u_{x_1}+a_2u_{x_2}+u_t=0.$$

這類方程叫 transport equation。它的解法很直接: 如果現在 $t=0$ 時的密度是

$$u(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2),$$

這裡 $f(x_1,x_2)$ 是已知的函數, 叫始值 (initial value) 。由上面三式得

$$\begin{aligned}&u(x_1+v_1t,x_2+v_2t,t)\\&=u(x_1+v_1\cdot 0,x_2+v_2\cdot 0,0)\\&=f(x_1,x_2).\end{aligned}$$

換個自變數 $x_1+v_1t\to x_1$, $x_2+v_2t\to x_2$ 便得到解:

$$u(x_1,x_2,t)=f(x_1-v_1t,x_2-v_2t).$$

從這個解方程的過程中, 我們得到兩個重要的觀念: 第一個是對 transport equation 來說, 這些線 $\{(x_1+v_1t,x_2+v_2t,t)\}$ 有特殊的意義, 訊息是隨著它們傳遞, 這些線因而稱做 characteristic curves。這是一大類 PDE, 叫 hyperbolic PDE 所有的共通特性。另一個觀念是要解一個 PDE, 通常要給其他附加條件, 在這裡是給定 initial value $f(x_1,x_2)$。是和 ODE 相似, 只不過 ODE 的始值是個數或向量; 而 PDE 的始值是函數。因此 PDE 要比 ODE 來得豐富。

4. Integration

PDE 含有微分, 而微積分基本定理 (fundanental theorem), 告訴我們: 一個函數微分的積分就是函數本身:

$$\int_a^x f'(y)dy=f(y)\Big|_{y=a}^{y=x}=f(x)-f(a).$$

因此積分理論對研究 PDE 是必要的, 有關微分和積分的關係式是解 PDE 最根本的工具。單維微積分除基本定理, 還有部分積分定理 (integration by parts):

$$\begin{aligned}&\int_a^x f'(y)g(y)dy\\&=f(y)g(y)\Big|_{y=a}^{x}-\int_a^x f(y)g'(y)dy,\end{aligned}$$

我們知道這是由基本定理和 product rule 而來的:

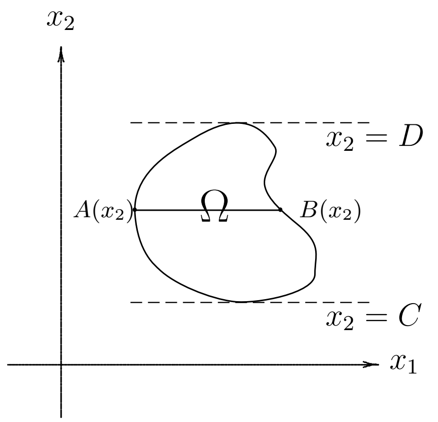
$$f'g=(fg)'-fg'.$$

這兩個定理在多維空間的推廣, 是微積分史上的大事, 我們在這裡簡單說明一下: 先看二維空間 $u(x_1,x_2)$ 偏微分 $u_{x_1}(x_1,x_2)$ 在一個區域 Ω 的積分:

$$\iint\limits_{\Omega} u_{x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

由 fundamental theorem 得到

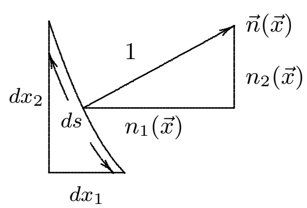
$$\begin{aligned}&\int_{A(x_2)}^{B(x_2)} u_{x_1}(x_1,x_2)dx_1\\&=u(B(x_2),x_2)-u(A(x_2),x_2),\end{aligned}$$

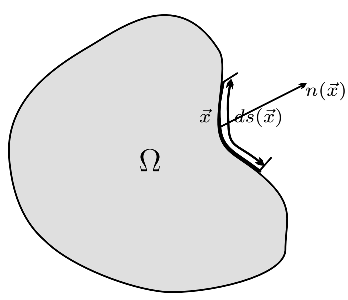


是以上面的雙重積分成為單積分

$$\iint_{\Omega} u_{x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_C^D (u(B(x_2), x_2) - u(A(x_2), x_2))dx_2,$$

其中 $(A(x_2), x_2)$ 和 $(B(x_2), x_2)$ 是 Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 上的點。邊界 $\partial\Omega$ 是個曲線, 曲線上有兩個自然的幾何量, outer normal $\vec{n}(\vec{x})$ 和長度 $dS(\vec{x})$,





$\vec{n} = \vec{n}(\vec{x}) = (n_1, n_2)(\vec{x})$ 是單位向量, 長度為一, 很簡單的可以看出底下的關係式:

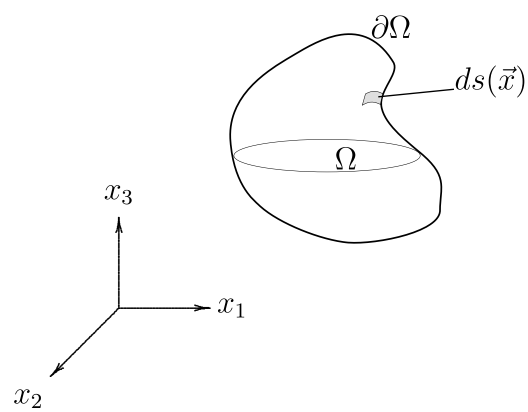
$$\frac{dx_2}{dS(\vec{x})} = \frac{n_1(\vec{x})}{1};$$

$$dx_2 = n_1(\vec{x})dS(\vec{x}),$$

而由前式得到一個簡潔的式子:

$$\iint_{\Omega} u_{x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$
$$= \int_{\partial\Omega} u(x_1, x_2)n_1(\vec{x})dS(\vec{x}).$$

這裡我們注意到在 $\vec{x} = (A(x_2), x_2)$ 時, $n_1(\vec{x}) < 0$ 而在 $\vec{x} = (B(x_2), x_2)$ 時, $n_1(\vec{x}) > 0$, 所以 $\int_C^D$ 可以合成 $\int_{\partial\Omega}$, 這也說明了引進自然的幾何量 $\vec{n}(\vec{x})$ 和 $dS(\vec{x})$ 是很有用的。相同的步驟可以應用到多維空間 $u = u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{n}(\vec{x}) = (n_1(\vec{x}), n_2(\vec{x}), \ldots, n_m(\vec{x}))$, 而 $dS(\vec{x})$ 是邊界 $\partial\Omega$ 的微小量度, 當 $\vec{x} = (x_1, x_2)$ 時, $dS(\vec{x})$ 是曲線微小長度, 當$\vec{x} = (x_1, x_2, x_2)$ 時, $\partial\Omega$ 是曲面, 而$dS(\vec{x})$ 是 $\partial\Omega$ 的微小面積。



我們有

$$\iint \cdots \int_{\Omega} u_{x_i}(x)dx_1 \cdots dx_m$$
$$= \int \cdots \int_{\partial\Omega} u(\vec{x})n_i(\vec{x})dS(\vec{x}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

我們也可以考慮一群函數

$$\vec{u}(\vec{x}) = (u^1(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \ldots, u^m(\vec{x})),$$

並引進 divergence 這個符號:

$$\text{div } \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial u^1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial u^m}{\partial x_m}(\vec{x}),$$

那麼由前式得到重要的 divergence theorem

$$\iint \cdots \int_\Omega \text{div } \vec{u}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_m = \int \cdots \int_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS(\vec{x}).$$

它是 fundamental theorem 在多維的推廣。

其次我們再來看 integration by parts 的推廣: 取兩個函數 $v(\vec{x}), w(\vec{x})$ 再看:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}) &= v(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) \\ &= (v(\vec{x}) w_{x_1}(\vec{x}), v(\vec{x}) w_{x_2}(\vec{x}), \ldots, \\ &\quad v(\vec{x}) w_{x_m}(\vec{x})).\end{aligned}$$

直接的計算可以得到

$$\text{div } \vec{u}(\vec{x}) = \nabla v(\vec{x}) \cdot \nabla w(\vec{x}) + v(\vec{x}) \Delta w(\vec{x})$$

這是多維的 product rule。由這個式子, 再把 divergence theorem 用在 $\vec{u}(\vec{x})$ 便得到

$$\begin{aligned}&\iint \cdots \int_\Omega \nabla v(\vec{x}) \cdot \nabla w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_m \\ &= \int \cdots \int_{\partial\Omega} v(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) dS(\vec{x}) \\ &\quad - \iint \cdots \int_\Omega v(\vec{x}) \Delta w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_m,\end{aligned}$$

這裡我們用了一個新的符號

$$\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) = \nabla w(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})$$

是函數 $w(\vec{x})$ 在 outer normal $\vec{n}(\vec{x})$ 的 directional derivative。前式是 integration by parts 在多維的推廣, 又叫 Green identity。

我們舉個例子, 利用 divergence theorem 來導出流體不可壓縮性的 PDE. 假定 $\vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}))$ 是流體在 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的流速, 由 divergence theorem

$$\iiint_\Omega \text{div } \vec{u}(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS(\vec{x}),$$

$\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})$ 是流速 $u(\vec{x})$ 在 outer normal $\vec{n}(\vec{x})$ 的分量, 是流體流出邊界 $\partial\Omega$ 的速率。流體既是不可壓縮, 那麼流進流出一個封閉曲面 $\partial\Omega$ 的總量爲零:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS(\vec{x}) = 0.$$

這對任何一個區域 Ω 都成立, 由此我們得到不可壓縮性的 PDE

$$\text{div } \vec{u}(\vec{x}) = 0$$

這是 divergence 概念的內涵最具體的表現。下兩節我們導出在第一節提到的基本 PDE。

5. Wave Equation

我們已經看到一些由自然現象導出的 PDE, 這一節要探討波動的現象, 最常感覺到的波動現象就是聲音。聲音是如何傳遞的?

它是由於物質的壓縮而引起的。我們來看可壓縮氣體的 PDE, 首次由 Euler 導出。Euler 方程是最簡單的氣體 PDE, 它是個方程組, 關連著氣體密度 $\rho(\vec{x},t)$, 速度 $\vec{u}(\vec{x},t)$ 和壓力 P。壓力是隨密度而變

$$p = p(\rho).$$

譬如氫 $p(\rho) = \rho^{\frac{5}{3}}$, 氧 $p(\rho) = \rho^{\frac{7}{5}}$ 等。導出 PDE 的基本原則是質量守恆 (Conservation of mass) 及動量守恆 (Conservation of momentum)。先看 Conservation of mass: 它是說一個區域 Ω 內質量

$$\iiint\limits_{\Omega} \rho(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3$$

隨時間的變化, 等於由邊界 $\partial\Omega$ 在單位時間內流進的質量 flux:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega} \rho(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 = \iint\limits_{\partial\Omega} \text{flux } dS(\vec{x}).$$

流量 flux 是密度 ρ 和速度 $\vec{u}$ 在 inner normal $-\vec{n}$ 的分量$-\vec{u}\cdot\vec{n}$ 的乘積:

$$\text{flux} = (\rho\vec{u})(\vec{x},t)\cdot(-\vec{n}(\vec{x})),$$

我們因此得到

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega} \rho(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 + \iint\limits_{\partial\Omega} (\rho\vec{u})(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS(\vec{x}) = 0, \quad \text{(Conservation of Mass)}.$$

關於 momentum ρu_i, 除了如同上述的 $\text{flux} = -\rho u_i\cdot(\vec{u}\cdot\vec{n})$ 外, 還有如黏性其他的作用, Euler 方程只考慮由壓力 $p(\rho)$ 在 x_i 的分量 $p(\rho)n_i$ 所引起的變化:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega} \rho u_i(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 + \iint\limits_{\partial\Omega} [(\rho u_i\vec{u})(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) + p(\rho(\vec{x},t))n_i(\vec{x})]dS(\vec{x}) = 0, \quad i=1,2,3, \quad \text{(Conservation of momentum)}.$$

上面邊界 $\partial\Omega$ 積分可由 divergence theorem 改爲 Ω 內的積分, 如:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} (\rho\vec{u})(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS(\vec{x}) = \iiint\limits_{\Omega} \text{div } \rho\vec{u}(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3.$$

又由於 Ω 可以是任一區域, 而得到 Euler 方程:

$$\rho_t + \text{div }(\rho\vec{u}) = 0 \quad \text{(Conservation of Mass)},$$

$$(\rho u_i)_t + \text{div }(\rho u_i\cdot\vec{u}) + (p(\rho))_{x_i} = 0, \quad i=1,2,3 \quad \text{(Conservation of Momentum)}.$$

我們得到兩組的 Euler 方程, 一組是積分方程, 由於不連續的方程也可以積分, 積分方程可以用來研究 shock waves, 當我們談到另一組 PDE 的弱解 weak solution 時, 指的就是積分方程。

Euler 的 PDE 是非線性的, 雖然經過一百多年, 許多先賢的研究, 至今仍是公認的

艱難 PDE。如果只要研究聲音傳播, 那麼因爲聲音是微弱的壓縮所產生的, 我們可以把 Euler 方程線性化 (linearization)。假定我們是看在平靜無風, 常密度的情況下, $\vec{u} \cong \vec{0}$, $\rho \cong \rho_0$, 那麼對 $\vec{0}, \rho_0$ 的 linearization 是對 $\vec{u}$ 和 $\rho - \rho_0$ 做 Taylor expansion, 而把平方及高次項不計, 如 Conservation of Mass 成爲:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_t + \rho u_{1x_1} + \rho u_{2x_2} \\ &\quad + \rho u_{3x_3} + u_1\rho_{x_1} + u_2\rho_{x_2} + u_3\rho_{x_3} \\ &\cong \rho_t + \rho_0 u_{1x_1} + \rho_0 u_{2x_2} + \rho_0 u_{3x_3}, \end{aligned}$$

在 Conservation of momentum 內

$$p(\rho)_{x_i} \cong p'(\rho_0)\rho_{x_i},$$

因此 Euler 方程的 linearization 是

$$\rho_t + \rho_0 u_{1x_1} + \rho_0 u_{2x_2} + \rho_0 u_{3x_3} = 0$$

$$\rho_0 u_{it} + C^2 \rho_{x_i} = 0, i = 1, 2, 3.$$

上式我們引進了一個重要的量: 聲速 C:

$$C^2 = p'(\rho_0),$$

上面的 linearized PDE 可以合併爲

$$\rho_{tt} = C^2[\rho_{x_1x_1} + \rho_{x_2x_2} + \rho_{x_3x_3}],$$

這就是 Wave equation, 一般形式爲

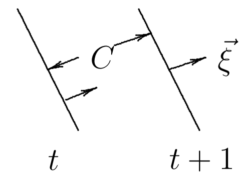
$$u_{tt} = C^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} = C^2 \Delta u,$$

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

這個 PDE 叫 Wave equation, 它在任何方向 $\vec{\xi}$, $|\vec{\xi}|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^2 = 1$, 都有行波解 traveling wave, 而速度爲 C:

$$u(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x} \cdot \vec{\xi} - Ct).$$

這可以直接代入 PDE 就知道了:



$$u_{tt} = C^2 \varphi''$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 \varphi'',$$

$$故 u_{tt} = C^2 \Delta u.$$

換句話說, 不管波的形狀 φ 和波的方向 $\vec{\xi}$ 爲如何, Wave equation 就是把它依速度 C 向前推動。

有一大類 PDE, 叫雙曲型 PDE (hyperbolic PDE), 能夠維持類似前述的波性値, Wave equation 是 hyperbolic PDE 最重要的範例。

6. Heat Equation

上節我們推導 Euler 方程時, 如果那時考慮進去黏性 viscous 的作用, 那麼 Euler 方程就變爲 Navier-Stokes 方程。自然界許多現象, 如黏性、熱傳等, 都屬擴散性的。這一節我們推導最簡單的擴散方程, heat equation。

把物體的溫度稱做 $u(\vec{x}, t)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 假定密度 ρ 和比熱 a 爲常

數, heat equation 的根本假定是 Fourier-Newton Law, 它是說熱量 ρu 的傳導是和溫差 $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ 成正比, 這個 Law 的具體表現是這樣的: 取固定區域 Ω, 區內總熱量的時間變化率

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega} \rho u(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3$$

等於由邊界 $\partial\Omega$ 進入的熱 flux:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \text{flux} dS(\vec{x}).$$

Fourier-Newton Law 是說熱量的流向是 $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ 再乘個熱傳導係數 k, 由於熱量應由溫高處傳向溫低處, 因此 $k > 0$, flux 是指熱傳入 $\partial\Omega$ 的量, 是 $k\nabla u$ 在 outer normal $\vec{n}$ 的分量 $k\nabla u \cdot \vec{n}$, 所以我們得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega} \rho u(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ =&\iint\limits_{\partial\Omega} \nabla u(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS(\vec{x}),\end{aligned}$$

由 divergence theorem 得

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} \rho u_t(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ =&\iiint\limits_{\Omega} k \text{ div } (\nabla u(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3.\end{aligned}$$

直接的計算得到

$$\begin{aligned}\text{div }(\nabla u) &= \text{div }(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})\\ &= \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})_{x_i} = \Delta u,\end{aligned}$$

由此導出 heat equation

$$u_t = K\Delta u,$$

$K = \frac{k}{(\rho a)}$ 是個正常數。

Heat equation 是一類 PDE, 拋物型 PDE (parabolic PDE), 的範例, 它和 hyperbolic 型的 wave equation 有多種根本性的差異, 我們用 dimension analysis 來提出一個重要的差異。dimension analysis 是把空間和時間度量改變, 如公尺改爲厘米, 分改爲秒:

$$v(\vec{x},t) = u(\alpha\vec{x},\beta t)$$

α, β 爲正常數。直接計算得

$$v_t = \beta u_t,$$

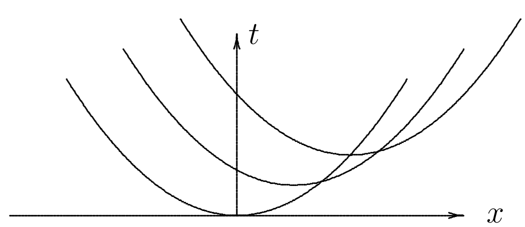
$$v_{x_i} = \alpha u_{x_i},$$

$$\Delta v = \alpha^2 \Delta u$$

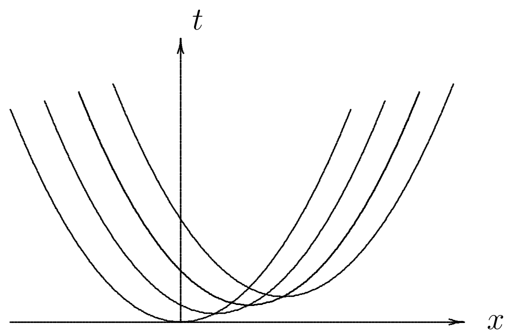
我們要問的是: 如果 $u(\vec{x},t)$ 是一個 PDE 的解, 那麼常數 α, β 必須有什麼關係, 才能使 $v(\vec{x},t)$ 也是解? 由上式知道:

$$\begin{aligned}&\alpha = \beta, \text{ wave equation;}\\ &\alpha^2 = \beta, \text{heat equation.}\end{aligned}$$

因此對 wave equation 來說, 空間 $\vec{x}$ 和時間 t 以同一尺度延擴, 仍可得到解, 可以說解是隨直線 $\frac{\vec{x}}{t} = \text{constant}$ 傳播的, 這和上節討論 traveling wave 時, 得到的結論是相容的。對 heat equation 來說, 則是拋物線 $\frac{\vec{x}}{\sqrt{t}} = \text{constant}$ 了。當然



$\frac{(\vec{x}-\vec{x_0})}{\sqrt{t-t_0}}$ 也可以。我們由此可以知道解傳播的速度可以任意大。



由此可以推出 heat equation 解的光滑性和不可逆性等等, wave equation 沒有的性質來。這裡不細加討論。

7. Laplace Equation

Wave equation 和 heat equation 有大的差別, 但它們的定常解, 就是不隨時間改變的解, $u(\vec{x},t) = u(\vec{x})$, 都滿足 Laplace equation

$$\Delta u = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(\vec{x}) = 0.$$

由於這個緣故, 還有其他對稱性質, Laplace equation 可以說是最重要的 PDE。Laplace equation 有許多對稱性質, 如果 $u(\vec{x})$ 是個解, 那麼 $u(\vec{x}+\vec{x_0})$, $u(\alpha\vec{x})$, $u(A\vec{x})$, A: orthogonal matrix, 也都是解。就像一個圓球, 轉來轉去, 漲大縮小, 仍是個球。

Laplace equation 是橢圓方程 (elliptic PDE) 的範例。它和 wave equation 及 heat equation 性質極不同, 但一般 PDE 都有一個共通的事, 就是都需要附加條件, 我們就這點稍微申論一下。我們知道要解多項式, 如 $ax^2+bx+c=0$, 是不必附加條件的, 解就是

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

就這兩個。如果要解一個 ODE, 如

$$y'' + y = 0,$$

那麼必須給兩個附加條件, 譬如始值 initial value, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$ 才能得到確切的解 $y(t) = 3\cos t + 7\sin t$。要是不給這兩個 initial value, 那麼就有無窮多的解 $y(t) = a\cos t + b\sin t$, a 和 b 可以是任何常數。

現在來看 PDE, 先看 heat equation, 在一個區域 Ω:

$$u_t = K\Delta u, (\text{PDE})$$

$$x\epsilon\Omega, \quad t > 0.$$

解 heat equation 就是要知道在 Ω, $x\epsilon\Omega$, 將來, $t>0$, 溫度 $u(\vec{x},t)$ 是什麼。從直觀的考慮, 我們需要知道: 現在的溫度 $u(x,0)$, 以及在邊界 $\partial\Omega$ 的情況又是如何。現在的溫度和 ODE 相似

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (\text{initial value})$$

只不過在 ODE 時 initial value 是常數, 在 PDE 時 initial value $u_0(x)$ 是給定的函

數。邊界的情況就複雜了, 一般有兩個簡單的條件, 一個是在邊界給定溫度:

$$u(\vec{x},t) = u_1(\vec{x},t), \vec{x}\epsilon\partial\Omega,$$
$$t>0, \text{(Dirichlet boundary condition)},$$

另一個是假定邊界的熱流量是給定的:

$$\nabla u(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) = u_2(\vec{x},t),$$
$$\vec{x}\epsilon\partial\Omega, \quad t>0,$$
$$\text{(Neumann boundary condition)}.$$

這兩個 boundary condition, 只能取一個。那麼我們的考慮是不是週全? 換句話說, 這些附加條件 initial value 和 boundary condition 是不是會給得太多以致於沒有解? 或是太少了而有很多解? Hadamard 有三個 well-posed 條件: 有解, existence, 頂多一個解, uniqueness, 附加條件稍加變動解也只稍微變動, stability。Heat equation 加上以上的附加條件是 well-posed 的。我們現在只看 uniqueness 一事, 順便介紹能量方法, energy method。Uniqueness 是要證明如果 u_1 和 u_2 是解, 那麼 $u\equiv u_1-u_2$ 恆爲零, 我們就看 Dirichlet boundary condition, 因爲 u_1 和 u_2 各有相同的 initial value 和 boundary condition, $u\equiv u_1-u_2$ 滿足

$$u_t = K\Delta u, \quad \vec{x}\epsilon\Omega, \quad t>0 \text{(PDE)}$$
$$u(\vec{x},0)=0, \quad \vec{x}\epsilon\Omega \quad \text{(initial value)}$$
$$u(\vec{x},t)=0, \quad \vec{x}\epsilon\partial\Omega, \quad t>0,$$
$$\text{(Dirichlet boundary condition)}.$$

Energy method 是把 PDE 乘以 u 再積分:

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 = \iiint_\Omega K(u\Delta u)(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3.$$

右端用 Green identity 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ &= -\iiint_\Omega K(\nabla u\cdot\nabla u)(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ &+\iint_{\partial\Omega}K(u\nabla u)(\vec{x},t)\cdot n(\vec{x})dS(\vec{x})\\ &\leq \int\int_{\partial\Omega}K(u\nabla u)(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(x)dS(\vec{x})\end{aligned}$$

由 Direchlet boundary condition, 上式右端爲零而得到 energy inequality

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 \leq 0.$$

再對時間積分得

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ &\leq\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},0)dx_1dx_2dx_3,\\ &\qquad t\geqslant 0,\end{aligned}$$

由 initial value $u(\vec{x},0)=0$, 得右端爲零。左端顯然是非負的, 因之

$$\iiint_\Omega(\frac{u^2}{2})(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 = 0, \quad t\geqslant 0.$$

由此證出 uniqueness $u(\vec{x},t)=0$。

以上 heat equation 加上 initial value 及 boundary condition 就構成 heat equation 的初邊值問題 (initial-boundary value problem)。我們剛證明了這個問題 well-posed 中的 uniqueness。以下我們來看 wave equation:

$$u_{tt} = C^2\Delta u,\ \vec{x}\epsilon\Omega, t > 0(\text{PDE}).$$

由於對時間有兩次偏微分 u_{tt}, initial value 需要有兩個:

$$\begin{aligned} &u(\vec{x},0) = f(\vec{x}),\\ &u_t(\vec{x},0) = g(\vec{x}),\\ &\vec{x}\epsilon\Omega, (\text{initial value}), \end{aligned}$$

Boundary condition 也可以是 Dirichlet 或 Neumann (或其他更一般的)。這樣的 initial-boundary value problem 也是 well-posed。譬如 uniqueness 同樣可以用 energy method 來證明, 不過和 heat equation 情況有些不同, 這裡是把 PDE 乘上 u_t (非 u) 再積分的, 而得到 energy identity

$$\begin{aligned} &\iiint_\Omega \Big(\frac{u_t^2}{2}+\frac{C^2\mid\nabla u\mid^2}{2}\Big)(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ =&\iiint_\Omega \Big(\frac{u_t^2}{2}+\frac{C^2|\nabla u|^2}{2}\Big)(\vec{x},0)dx_1dx_2dx_3, \end{aligned}$$

讀者可以自己一試。至於 Laplace equation,

$$\Delta u = 0, x\epsilon\Omega, (\text{PDE}),$$

因爲這個 PDE 不含時間變量 t, 因此無所謂 initial value, 只有 boundary condition, 而構成 boundary value problem。一件有趣的事是: Dirichlet boundary condition 和 Neumann boundary condition 有重要的差異。Dirichlet boundary condition 給唯一的解, 而 Neumann boundary condition 要不是給無窮多個解, 就是無解。我們先看問題的物理意義, 如果 $u(\vec{x},t)$ 是溫度, 那麼

$$\begin{aligned} &(\nabla u\cdot\vec{n})(\vec{x}) = f(\vec{x}),\\ &\vec{x}\in\partial\Omega\\ &\qquad(\text{Neumann boundary condition}), \end{aligned}$$

是給定邊界 $\partial\Omega$ 熱的流量爲 $f(\vec{x})$。由於 Laplace equation 是描述定常, 不隨時間而變的溫度分佈, 因此邊界 $\partial\Omega$ 的 總熱流量應爲零:

$$\iint_{\partial\Omega} f(\vec{x})dS(\vec{x}) = 0.$$

換句話說, 上式的 Compatibility condition 若不成立, 這個 boundary value problem 便無解。上面的 compatibility condition 也可以用 divergence theorem 來證明:

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_\Omega \Delta u dx_1dx_2dx_3\\ &= \iiint_\Omega \text{div }(\nabla u)dx_1dx_2dx_3\\ &= \iint_{\partial\Omega} \nabla u\cdot\vec{n}dS(\vec{x})\\ &= \iint_{\partial\Omega} f(\vec{x})dS(\vec{x}). \end{aligned}$$

有了 compatiblity condition, Laplace equation 的 boundary value problem 嚴格來說仍不是 well-posed 的, 我們注意到如果 u 是個解, u + constant 也同樣滿足 PDE 和 Neumann boundary condition, 因此 u + constant 也是解。把 PDE 乘以

u 再積分, 就是 energy method, 它可以用來證明兩個解的差是個常數。讀者可以一試, 也可以用 energy method 證明 Laplace equation, 加上 Dirichlet boundary condition 解的 uniqueness。

以上只討論 uniqueness, 解的 existence 也是極有趣的事, 另外還有其他如: 解的穩定性, 波的傳遞, 邊界層, 等等的問題。

8. Schrödinger Equation

我們討論過的 PDE, 可以說是先訂下一些自然現象的基本定律, 再由數學語言, 用微積分定理推導出來的。然而, 並不是所有重要的 PDE 都是如此循序推導出來的。許多時候是在對某些自然現象有了基本的了解之後, 然後找出其中根本的性質, 如對稱, 臨界現象, 波動性質等, 再寫下一個能契合這性質的 PDE。許多生物上的 PDE 是這樣來的。量子力學裡的 Schrödinger equation 是由離散關係 (dispersion relation), 的考慮而提出來的。我們看一個震動波

$$u(x,t)=e^{\sqrt{-1}(wt+kx)}$$

如果 $u(x,t)$ 是 wave equation $u_{tt}=C^2u_{xx}$ 的解, 那麼頻率和波長有下面的關係:

$$w=\pm Ck,$$

波的行進速度是常數 $\frac{w}{k}=\pm C$, 這是我們在討論 wave equation 時就知道的, 這也是雙曲波 (hyperbolic wave) 的特性。要是 $u(x,t)$ 是 heat equtation $u_t=ku_{xx}$ 的解, 那麼

$$w=Fk^2,$$

$$u(x,t)=e^{-k^2t+\sqrt{-1}kx},$$

這行進波隨時間以 e^{-k^2t} 衰減, 這是由於擴散 dissipation 現象, 使得波相互抵消的緣故。除了以上二類, 另有一種叫離散波 (dispersive wave) 的, 這類波既不衰減也不以一定的速度前進。這類波可以用頻率和波長的關係, 離散關係 (dispersion relation), 來界定:

$$w=W(k).$$

Schrödinger equation 就是由 dispersion relation:

$$w=k^2$$

而來的。從這個關係可以寫下 PDE:

$$\sqrt{-1}u_t=u_{xx}(\text{Schrödinger equation})$$

或一般形式

$$\sqrt{-1}\ \hbar\ u_t=\Delta u.$$

Schrödinger equation 是量子力學 (quantum mechanics) 的根本方程。它的物理意義是在方程提出之後的一段時間, 才得到滿意的解釋。

9. 結語

由以上粗淺的介紹, 我們可以約略體會到 PDE 的豐富和有趣。自十八世紀以來, 許多偉大的數學家, 花了很大的心神研究 PDE, 這些研究引發出深奧的分析, 如, real analysis, harmonic analysis, functional analysis, 而創造出許多美妙的 PDE 理論。這些理論對數學的其他科目如數論、幾何, 以及物理、工程、生物等自然科學, 有關鍵性, 不可或缺的作用。然而, PDE 這一個極廣闊的領域內, 有許多根本, 容易入門的研究題目在等著我們。讀者可以在本專題內看到 PDE 一些重要方向的介紹。

—本文作者爲中央研究院院士、中央研究院數學所特聘研究員—