

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*
(Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*)

Régularisation du système de l'équilibre des structures élastiques discrètes

Georges VERCHERY

Résumé — On montre comment on peut résoudre le système de l'équilibre des structures élastiques discrètes sans imposer au préalable les conditions aux limites en déplacement, grâce à la connaissance des singularités représentant les mouvements de corps rigide.

How to solve the singular equilibrium system of discrete elastic structures

Abstract — Taking advantage of the fact that rigid body motions are the singularities of the equilibrium system of discrete elastic structures, this system can be solved prior to assigning the displacement boundary conditions.

Abridged English Version — The equilibrium system for discrete elastic structures

$$(1) \quad Ku = f$$

is singular and the eigenvectors for the zero eigenvalue of the symmetrical positive stiffness matrix are the r rigid body motions. In the classical solving process, this system is modified using the prescribed displacement boundary conditions, which results in a regular system. Whereas it is then possible to solve for several right-hand-side loads, this process does not permit a change of the displacement boundary conditions without coming back to the original system. The present method introduces a universal regularization, not dependent on particular boundary conditions.

Let R be the $n \times r$ matrix, the columns of which are the orthonormal eigenvectors for the zero eigenvalue:

$$(3) \quad KR = 0.$$

The condition for the system (1) to have solutions is:

$$(4) \quad R^T f = 0.$$

which assesses the static equilibrium of the forces f .

The regularized matrix K_α is defined as:

$$(5) \quad K_\alpha = K + \alpha RR^T$$

which has the same eigenvectors as K and RR^T , with α as eigenvalue for the R eigenvectors:

$$(6) \quad K_\alpha R = \alpha R.$$

The matrix is regular for any non-zero α , so the system

$$(7) \quad K_\alpha v = f$$

can be solved and its solution v is orthogonal to the kernel R :

$$(8) \quad R^T v = 0,$$

which shows that it is the solution of the system (1) orthogonal to R .

Consequently, the general solution of the system (1) is:

$$(10 \text{ bis}) \quad u = K_\alpha^{-1} f + R \omega$$

Note présentée par Paul GERMAIN.

0764-4450/90/03110585 \$ 2.00 © Académie des Sciences



in which ω is a r -parameter vector defining the actual rigid body motion.

This completes the solution for statically determinate structures. Further analysis is required for statically indeterminate structures, as the determinations of the load vector f and the rigid body motion vector ω are required, prior to application of equation (10 bis).

In addition to equations (1) and (4), the complete system of the equilibrium includes:

— the splitting of the load into given forces f_d and reaction forces f_r :

$$(12) \quad f = f_d + f_r$$

— the expression of p independent prescribed constraints on the displacements, with p equal to or greater than r :

$$(13) \quad C^T u = \delta,$$

in which C is a matrix of order $n \times p$ and rank p .

Further, the reaction forces can be expressed with p parameters ϕ as:

$$(14) \quad f_r = F \phi$$

in which F is also a matrix of order $n \times p$ and rank p .

Then, combining these equations, the $p+r$ equations determining the p reaction parameters ϕ and the r rigid body motion parameters ω are derived:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} C^T K_a^{-1} F & C^T R \\ R^T F & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta - C^T K_a^{-1} f_d \\ -R^T f_d \end{bmatrix}$$

All the data relevant to the boundary conditions are included in this system, the order of which is generally much less than the original system order.

With this method, the re-analyses under various boundary conditions are made easier. This can be applied to aided design, which requires fast reanalysis processes for full efficiency. It can simplify the solutions for contact problems and elastic crack propagation problems, which otherwise need long iteration methods, and can be useful for sub-structuring of large or repetitive structures.

Further, it is anticipated that this method can also apply to mixed or hybrid approaches, and to the solution of non-elastic discrete structural mechanics.

1. On sait bien que le système

$$(1) \quad Ku = f$$

réglissant l'équilibre des structures élastiques discrètes ou des milieux continus élastiques discrétisés (par éléments finis, par exemple) possède une matrice de rigidité $n \times n$ symétrique qui est singulière, semi-définie positive. Plus précisément, cette matrice K a r valeurs propres nulles, r étant le nombre de mouvements de corps rigide indépendants afférant au problème (r vaut 3 pour le cas plan, 6 pour le cas tridimensionnel, 1 pour le cas asymétrique, etc... suivant les symétries éventuelles du problème) et les r vecteurs propres correspondant sont ces mouvements de corps rigide. Les $n-r$ autres valeurs propres sont strictement positives. Le traitement habituel du problème repose sur le fait que la solution est unique à partir du moment où certains degrés de liberté (en nombre p au moins égal à r) représentant les conditions d'appui de la structure sont fixés : on élimine alors les équations correspondantes ou bien on les modifie, ce qui conduit à un système régulier susceptible d'être résolu. A conditions d'appui fixées, le changement de conditions aux limites en force peut se traiter très simplement, en résolvant à moindre coût pour plusieurs seconds membres, voire en combinant des solutions précédemment calculées. Mais, tandis



que la matrice K du système initial est évidemment universelle pour la structure, la matrice modifiée n'est valable que pour les conditions d'appui considérées, et tout changement de conditions aux limites en déplacement exige une nouvelle résolution d'un nouveau système linéaire qui peut être de très grande taille. La méthode proposée ici consiste au contraire à régulariser le système singulier d'une façon universelle, indépendante des conditions aux limites.

2. On désigne par R la matrice $n \times r$ dont les colonnes sont les r vecteurs décrivant les mouvements d'ensemble, vecteurs propres de K pour la valeur propre zéro. Ces vecteurs propres sont indépendants de la structure étudiée et parfaitement connus une fois défini le type de problème considéré : par exemple, pour tout problème tridimensionnel, ils représentent des combinaisons linéairement indépendantes des trois translations parallèles aux axes de coordonnées et des trois rotations linéarisées autour de ces axes. On peut toujours supposer que ces vecteurs propres sont orthonormés, soit :

$$(2) \quad R^T R = I_r,$$

où I_r est la matrice unité $r \times r$ (le lecteur se convaincra aisément que l'on peut s'affranchir de cette hypothèse, au prix de quelques modifications). On a donc :

$$(3) \quad KR = 0$$

et la condition pour que le système (1) ait des solutions est :

$$(4) \quad R^T f = 0$$

qui exprime que les forces f sont en équilibre statique :

3. On introduit alors les matrices régularisées K_α (résultant de la considération de la décomposition spectrale de la matrice initiale K) :

$$(5) \quad K_\alpha = K + \alpha RR^T.$$

Les matrices K , RR^T et K_α admettent les mêmes vecteurs propres. De plus, les K_α ont pour valeurs propres les valeurs propres non nulles de K et α , avec la multiplicité r :

$$(6) \quad K_\alpha R = \alpha R.$$

Pour α différent de 0, condition que nous fixons pour la suite, le système

$$(7) \quad K_\alpha v = f$$

est donc régulier. De plus, sa solution est orthogonale au noyau de K :

$$(8) \quad R^T v = 0.$$

Il en résulte que cette solution vérifie :

$$(9) \quad K_\alpha v = K v$$

et constitue ainsi la solution du système des équations (1) et (4) qui est orthogonale au noyau de K . De ce fait, elle est manifestement indépendante de la valeur de α .

La solution générale du système des équations (1) et (4) est donc la somme de cette solution particulière et du noyau de K :

$$(10) \quad u = v + R \omega$$

ou encore :

$$(10 \text{ bis}) \quad u = K_\alpha^{-1} f + R \omega$$



où ω est un vecteur de r paramètres arbitraires, qui définit le mouvement d'ensemble, projection de la solution sur le noyau :

$$(11) \quad \omega = R^T u.$$

4. Pour les systèmes isostatiques, l'analyse précédente résout complètement le problème : le vecteur f des forces pouvant en effet être déterminé à partir de la seule connaissance des forces données, on obtient la solution générale en résolvant d'abord l'équation (7), puis on trouve les r paramètres du mouvement d'ensemble en reportant cette solution générale dans les r conditions d'appui.

En revanche, pour les systèmes hyperstatiques, l'utilisation de la formule (10 bis) nécessite la détermination préalable du vecteur f des forces et du vecteur ω des paramètres du mouvement d'ensemble.

Or, généralement, les équations complémentaires des problèmes d'équilibre des structures sont :

- la décomposition des forces en forces données et de réactions :

$$(12) \quad f = f_d + f_r$$

- l'expression de p liaisons indépendantes sur les déplacements (liaisons supposées ici bilatérales), résultant des conditions de symétries, d'appui, ... :

$$(13) \quad C^T u = \delta$$

où C , de dimension $n \times p$, est de rang p .

On s'intéresse aux cas, pour lesquels la solution est unique, où le nombre p de liaisons est égal (cas isostatique) ou supérieur (cas hyperstatique) au nombre r de mouvements de corps rigide. Dans ce cas, les forces de réactions s'expriment à l'aide de p paramètres φ :

$$(14) \quad f_r = F \varphi$$

où F , de dimension $n \times p$, est de rang p (on peut d'ailleurs montrer qu'il est possible de choisir $F = C$).

Il faut ajouter ces équations (12) et (13) aux équations (1) et (4) pour former le système complet de l'équilibre. Par élimination, on obtient les $p+r$ équations régissant les p paramètres φ déterminant les forces de réaction et les r paramètres ω déterminant le mouvement d'ensemble :

$$(15) \quad \begin{bmatrix} C^T K_\alpha^{-1} F & C^T R \\ R^T F & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta - C^T K_\alpha^{-1} f_d \\ -R^T f_d \end{bmatrix}$$

C'est ce système qui contient, par les vecteurs δ et f_d et les matrices C et F , tout ce qui est spécifique aux conditions aux limites. Sa taille $p+r$ est en général très inférieure à la taille n du système (1).

5. Un trait essentiel de cette méthode est de faciliter les réanalyses d'une même structure sous des conditions aux limites différentes : si elle nécessite la détermination préalable de l'inverse de la matrice régularisée K_α (ou au moins des parties utiles de cette inverse), le traitement de chaque cas de chargement et d'appui est ensuite très rapide.

Les applications possibles de cette méthode sont nombreuses. Elle peut constituer un outil de grande valeur pour l'aide à la conception qui doit disposer d'un moyen de réanalyses rapides pour être effective. Elle peut avantageusement simplifier les analyses itératives pour la résolution de certains problèmes non linéaires, tels que les problèmes de contact et les problèmes de propagation de fissures en mécanique linéaire de la rupture, dans lesquels la non-linéarité résulte de l'indétermination des lignes ou surfaces



de contact entre domaines élastiques. Elle peut s'adapter à l'étude par sous-structures des structures complexes ou formées d'éléments répétitifs ou standard, en exprimant d'abord les solutions générales pour chaque sous-structure, puis en ajustant les paramètres de ces solutions par l'introduction des liaisons entre sous-structures.

6. Cette méthode de régularisation peut s'étendre aux approches en variables mixtes, y compris pour le traitement de singularités sur les variables en contraintes, comme dans le cas d'un milieu incompressible. En outre, les singularités introduites par les mouvements de corps rigide étant présentes dans tous les problèmes discrétisés de mécanique des milieux continus, la méthode peut simplifier toutes les méthodes itératives dans les problèmes non linéaires.

Pour terminer, on notera que cette régularisation constitue un cas particulier de la régularisation M_α d'une matrice quelconque M à l'aide de ses vecteurs propres pour la valeur propre 0 :

$$(16) \quad M_\alpha = M + \alpha W W^T$$

où V est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à droite pour la valeur propre 0 et W est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à gauche pour cette même valeur propre 0.

Note remise le 11 juin 1990, acceptée le 13 juillet 1990.

E.M.S.E., 42023 Saint-Étienne Cedex 2.

