複　數　與　簡　諧　振　動

Complex Variable and Harmonic Vibration

序 言

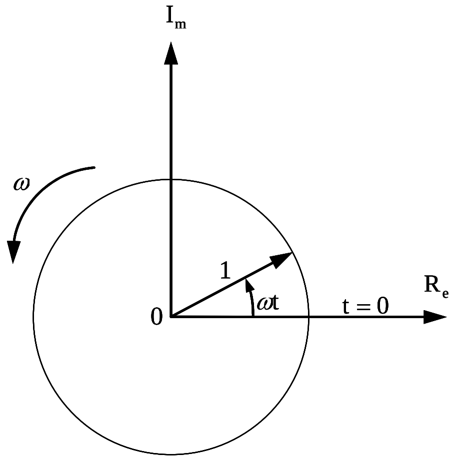
記得 94 年 6 月 9 日在台大土木系碩士班論文口試上，遇見海洋大學陳正宗教授，他是這次論文口試委員，他也是我很早以前台大的學生，他告訴我說：陳老師，你以前發表在機械月刊上〝複數與簡諧振動〞的論文，我把它當作工數及振動學的講義，而且學生學習的效果很好，何不多加流傳，以嘉惠學生。我聽了內心很感動，藉著這次主持〝台大營建知識網〞之便，將這篇論文稍加修正後，刊登在該網站上，希望能獲得大家的認同與喜愛。(該篇文章原刊登在機械月刊第 12 卷第 5 期, May 1986)

前言

本人在台大教授「振動」有關課程多年，一直發現許多學生對以複數表示簡諧振動之基本物理意義不甚了解，甚至覺得奇怪。試著找遍多本有關振動學書籍，卻大多毫無所獲，有時也遇到許多工程師也問到相同的問題，而一般的書籍及論文上又常發現這種複數形式的表示法，會覺得很熟悉，但又說不出其所以然，自然覺得如鯁在喉，有感於斯，本人借這次主編振動與噪音專輯之便，特在此佔一塊小小篇幅介紹這個簡單而且有趣的問題，並說明如何以複數分析簡諧振動之方法。又因簡諧振動乃為一切振動分析之基礎，這也是本人寫這篇文章之另一主要目的。

數學模擬與物理意義

一個單位簡諧力(a unit harmonic force) 可表示為：



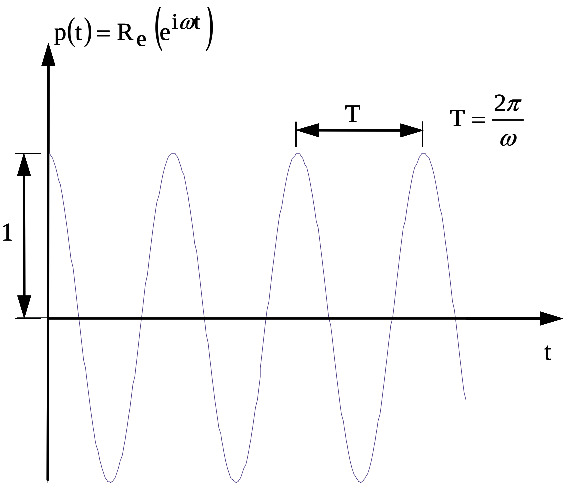


圖1 單位向量$e^{i\omega t}$之相位圖

圖2 $p(t)=\cos\omega t$ 之波形

$$p(t)=e^{i\omega t} \cdots\cdots(1)$$

上式中 e 代表指數函數，$i=\sqrt{-1}$，ω 代表頻率(rad/s)，t 代表時間(sec)。

我們必須先了解式(1)僅為外力 $p(t)$之表示法，並不表示 $p(t)$等於$e^{i\omega t}$。因為外力 $p(t)$為一個物理量，是一個時間函數，故為實數，而$e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ 為一個複數，故無法等於一個實數的物理量。但究竟式(1)代表什麼物理意義？及 $p(t)$與$e^{i\omega t}$之相互關係是什麼？我們利用圖 1 及圖 2 加以說明。

圖 1 係代表一個相位圖，R_e代表實數軸，I_m代表虛數軸。圖上有一個單位向量，當時間$t=0$時，單位向量剛好與R_e重合。此單位向量以ω之轉速作反時鐘方向轉動，故在任何時間 t，此單位向量與R_e軸之夾角為ωt，故圖 1 上之單位向量可表示為$e^{i\omega t}$。圖 2 係表示圖 1 上單位向量在R_e軸上之投影量，故呈弦函數$\cos\omega t$之波形變化，所以如果外力 $p(t)=\cos\omega t$，則在相位圖上可表示為$e^{i\omega t}$，所以 $p(t)$應等於$e^{i\omega t}$之實數部份如下式所示：

$$p(t)=R_e\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$=\cos\omega t \cdots\cdots(2)$$

上式中R_e係指括弧$(\ )$內之實數部份，所以式(1)右邊$e^{i\omega t}$之實數部份才是真正代表外力 $p(t)$之物理量。

可能有人會問如果$p(t)=\sin\omega t$則又如何以$e^{i\omega t}$來表示？我們可以將此外力 $p(t)$表示為：

$$p(t) = -ie^{i\omega t} \cdots\cdots (3)$$

上式右邊為$t=0$時，則單位向量剛好在$-I_m$軸上，故此向量作反時鐘方向轉動時，其在R_e軸上之投影量即為正弦函數$\sin\omega t$。同樣的式(3)僅是一個簡諧外力之表示法，並不代表$p(t)$等於$-ie^{i\omega t}$，但$p(t)$與$-ie^{i\omega t}$之實數部份應相等，即

$$p(t) = R_e\left(-ie^{i\omega t}\right)$$

$$= \sin\omega t \cdots\cdots (4)$$

所以任一大小及相位之簡諧力可表示為：

$$p(t) = (p_1 + ip_2)e^{i\omega t} \cdots\cdots (5)$$

上式表示任一簡諧力(不表示相等)，其大小(即振幅)p_0為$\sqrt{p_1^{\ 2} + p_2^{\ 2}}$及相位$\theta_p$如圖3所示，如果$p_1$及$p_2$均為正值，則其相位在第一象限內，簡諧力之波形如圖4所示，故該簡諧力應等於下式：

$$p(t) = R_e\left[(p_1 + ip_2)e^{i\omega t}\ \right]$$

$$= p_1\cos\omega t - p_2\sin\omega t$$

$$= p_0\cos(\omega t + \theta_p) \cdots\cdots (6)$$

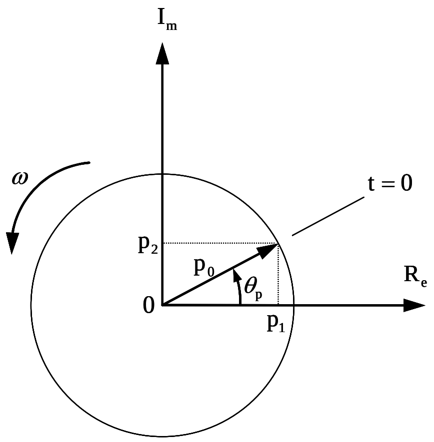


圖3 向量$(p_1+ip_2)e^{i\omega t}$之相位圖

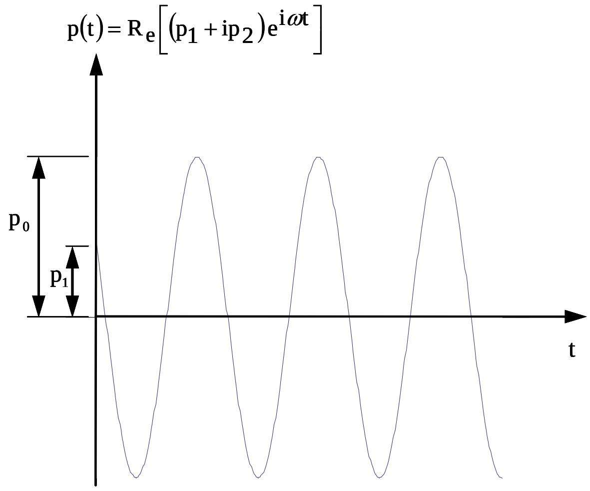


圖4 $p(t)=p_0\cos(\omega t+\theta_p)$之波形

上式中p_0代表$p(t)$之振幅，θ_p代表$p(t)$之相位角如下式所示：

$$p_0=\sqrt{p_1{}^2+p_2{}^2} \qquad (7)$$

$$\tan\theta_p=\frac{p_2}{p_1} \qquad (8)$$

所以式(5)右邊係代表一個向量，其大小為$\sqrt{p_1{}^2+p_2{}^2}$，以ω轉速作反時鐘方向轉動。當時間$t=0$時之位置如圖 3 所示，與R_e軸之夾角為θ_p。該向量在R_e軸上之投影量如圖 4 所示，即為簡諧力$p(t)=p_0\cos(\omega t+\theta_p)$之波形。

如果有二個以上之向量(或任意二個簡諧力)，其相位之關係為相對的，所以選擇其中之一向量之相位為參考值(一般假設$\theta=0$)，則其餘向量之相位即可由圖 3 之相位圖很明顯地表示出來。以上就是說明任一簡諧波形以複數表示之基本原理，同樣地簡諧波形亦可以$e^{-i\omega t}$表示之。以下我們來談談如何以複數分析一般簡諧運動，而且可以從分析過程中，看出這種分析方法之精神與優點所在。

簡諧振動之複數分析法

一個一度自由度系統如圖 5 所示，其運動方程式為：

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=p(t) \qquad (9)$$

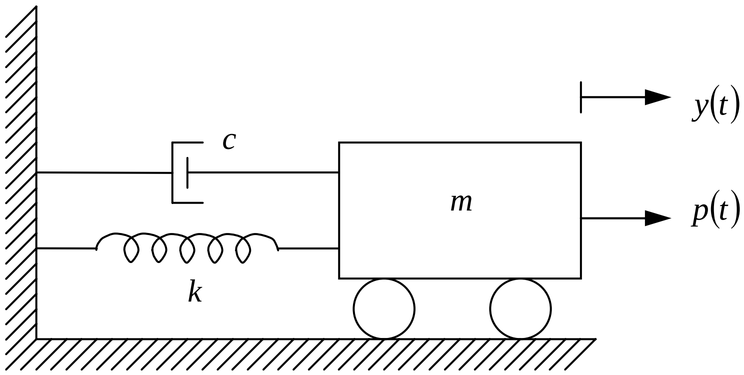


圖5 一度自由度系統

上式中 m, c, k, $p(t)$代表質量、阻尼、勁度及外力；$\ddot{y}$, $\dot{y}$, y 代表加速度、速度及位移。

式(9)二邊同除 m 則變成下式：

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{p(t)}{m} \cdots\cdots (10)$$

上式中ω_n代表自然頻率，ξ代表阻尼比，$\xi = c/2m\omega_n$。

式(10)為一般之一元二次常微分方程式，所以其解為

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \cdots\cdots (11)$$

上式中$y_h(t)$代表齊次解(homogeneous solution)，$y_p(t)$代表特解(particular solution)。因為y_h係與外力$p(t)$無關，而且因阻尼存在會很快衰減，所以當時間 t 增加，y_h之作用就愈不重要，所以又稱為暫態解(transient solution)，因其與外力無關故又稱自由振動解(free-vibration solution)。y_p係與外力$p(t)$之形式有關，如外力作用的時間較為長久，因y_h之影響已不重要，所以$y(t) \doteq y_p(t)$，故y_p又稱為穩態解(steady-state solution)，因其與外力之形式有關，故又稱強制振動解(force-vibration solution)。以下我們來討論如何以複數分析穩態解$y_p(t)$之基本原理。

如果$p(t)$為任一形式之簡諧力，其頻率為ω，故可以如式(5)之複數形式表示之，則穩態解$y_p(t)$亦可以複數表示如：

$$y_p(t) = (y_1 + iy_2)e^{i\omega t} \cdots\cdots (12)$$

也許有人會問為什麼$y_p(t)$可由式(12)表示？又代表些什麼物理意義？一般數學書本上分析一元二次常微分方程式時，如$p(t)$為簡諧形式（$\sin\omega t$或$\cos\omega t$），則即假設$y_p(t)$亦為簡諧形式(即$A\sin\omega t + B\cos\omega t$)。主要係基於將$y_p(t)$之簡諧形式代入常微分方程式中，令方程式二邊相等求解，並沒有提到任何物理意義。但在此我們例舉二個簡單的物理現象來說明，如當一人以ω頻率擊鼓，則我們所聽到的鼓聲頻率也一定是ω。如果係以簡諧形式擊鼓，則聽到的鼓聲一定也是簡諧形式。但擊鼓與聽到鼓聲之時間可能有少許之差異，即兩者之間存在有相位之關係。又如我們聽到一首華爾滋的舞曲，我們也一定以相同之節拍(即頻率)跳華爾滋的舞步，這就是說明輸入(input) $p(t)$與輸出(output) $y_p(t)$具有同步(相同頻率)之物理意義。雖然$p(t)$與$y_p(t)$之頻率相同，但兩者物理量不同，其大小及相位當然就不相同，所以任一簡諧力$p(t)$如式(5)所示，則$y_p(t)$就可以如式(12)表示之。如果系統之阻尼為零，則表示$y_p(t)$與$p(t)$之相位相同，所以阻尼之存在是造成相位差之主要原因，這種現象亦可由以後之式子中導出。

以式(12)代入式(9)之運動方程式中，則左右二邊可同時消去$e^{i\omega t}$，並比較兩邊之實數與虛數部分，可得下列二個方程式：

$$\begin{aligned} &\left(-m\omega^2 + k\right)y_1 - c\omega\, y_2 = p_1 \\ &c\omega\, y_1 + \left(-m\omega^2 + k\right)y_2 = p_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

式(13)可寫成矩陣形式如：

$$\begin{bmatrix} \left(-m\omega^2 + k\right) & -c\omega \\ c\omega & \left(-m\omega^2 + k\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

由式(14)可求得y_1及y_2為：

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\left(-m\omega^2 + k\right)p_1 + c\omega\, p_2}{\left(-m\omega^2 + k\right)^2 + (c\omega)^2} \\ y_2 &= \frac{-c\omega\, p_1 + \left(-m\omega^2 + k\right)p_2}{\left(-m\omega^2 + k\right)^2 + (c\omega)^2} \end{aligned} \qquad (15)$$

因此$y_p(t)$之大小(即振幅)y_0及相位角θ_{yp}則為：

$$y_0 = \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} = \frac{p_0}{\sqrt{\left(-m\omega^2 + k\right)^2 + (c\omega)^2}} \qquad (16)$$

$$\tan\theta_{yp} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{-c\omega\, p_1 + \left(-m\omega^2 + k\right)p_2}{\left(-m\omega^2 + k\right)p_1 + c\omega\, p_2} \quad \cdots\cdots (17)$$

所以 $p(t)$ 及 $y_p(t)$ 應等於下列之式子為：

$$\begin{aligned} p(t) &= R_e\left[\left(p_1 + ip_2\right)e^{i\omega t}\right] = p_0 \cos\left(\omega t + \theta_p\right) \\ y_p(t) &= R_e\left[\left(y_1 + iy_2\right)e^{i\omega t}\right] = y_0 \cos\left(\omega t + \theta_{yp}\right) \end{aligned} \quad \cdots\cdots (18)$$

式(15)、(16)、(17)亦可寫成為：

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\left(1-\beta^2\right)p_1 + \left(2\xi\beta\right)p_2}{m\omega_n^{\ 2}\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2\right]} \\ y_2 &= \frac{-\left(2\xi\beta\right)p_1 + \left(1-\beta^2\right)p_2}{m\omega_n^{\ 2}\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2\right]} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$y_0 = \frac{p_0}{m\omega_n^{\ 2}\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}} \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\tan\theta_{yp} = \frac{-\left(2\xi\beta\right)p_1 + \left(1-\beta^2\right)p_2}{\left(1-\beta^2\right)p_1 + \left(2\xi\beta\right)p_2} \quad \cdots\cdots (21)$$

上式中 ω_n 代表自然頻率，$\beta = \omega/\omega_n$。

如果阻尼 c 為零，亦即 $\xi = 0$，則 $\tan\theta_{yp} = \tan\theta_p$，所以 $y_p(t)$ 與 $p(t)$ 之相位相同。

例題

一個一度自由度系統如圖 5 所示，W, k, c 及 $p(t)$ 等值如下所示，試求(1)位移 $y_p(t)$ 及其與外力 $p(t)$ 之相位關係，及(2)慣性力、阻尼力及彈簧力之向量圖。

$W = 49.6 \times 10^3$ lb

$k = 100 \times 10^3$ lb/in

$c = 1125$ lb-s/in

$$p(t)=p_0\sin(\omega t+\theta_p)$$

$$p_0=1000\times 10^3\ \text{lb}$$

$$\omega=15\ \text{rad/s}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

解：

(1) 先將外力變成複數形式

$$p(t)=p_0\sin(\omega t+30^\circ)=p_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)$$

$$=(p_1+ip_2)e^{i\omega t}$$

所以

$$p_1=\frac{p_0}{2}=500\times 10^3\ \text{lb}$$

$$p_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}p_0=-866\times 10^3\ \text{lb}$$

外力 $p(t)$ 向量係在相位圖第 4 象限上如圖 6 所示

$$m=\frac{W}{g}=\frac{49.6\times 10^3}{32.2\times 12}=128.4\ \ \text{lb-s}^2/\text{in}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{100\times 10^3}{128.4}}=27.9\ \text{rad/sec}$$

$$\xi=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{1125}{2\times 128.4\times 27.9}=15.7\%$$

$$\beta=\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{15}{27.9}=0.54$$

由式(19)可得 y_1 及 y_2 為：

$$y_1=3.9\ \text{in}$$

$$y_2=-13.1\ \text{in}$$

所以 $y_p(t)$ 之振幅及相位為：

$$y_0=\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}=13.7\ \text{in}$$

$\tan\theta_{yp} = \dfrac{y_2}{y_1} = -3.36$（第 4 象限）

故 $y_p(t)$ 之波形為：

$$y_p(t) = 13.7\sin\left(\omega t + 16.57^\circ\right) in$$

圖 6 及圖 7 分別表示外力 $p(t)$ 及反應 $y_p(t)$ 之相位圖，所以 $y_p(t)$ 落後 $p(t)$ 之角度為：

$$\Delta\theta = 73.43^\circ - 60^\circ = 13.43^\circ$$

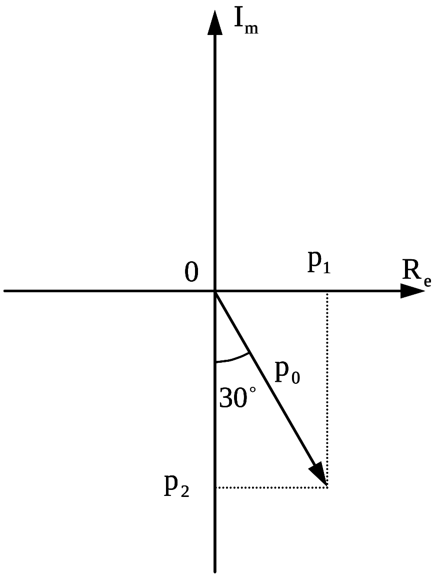


圖6 外力p(t) 之相位圖

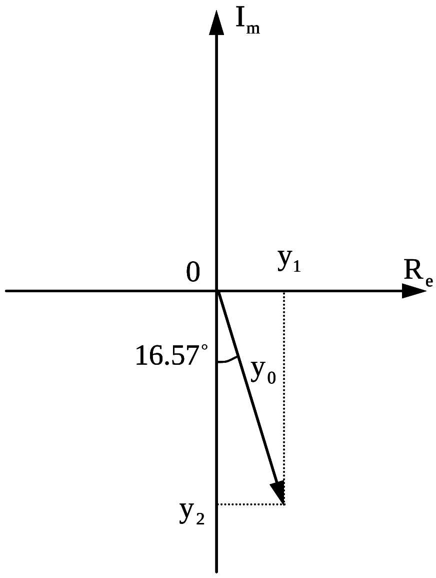


圖7 位移 $y_p(t)$ 之相位圖

（2）慣性力 $f_i(t) = m\ddot{y}_p(t) = -m\omega^2\, y_p(t)$

所以慣性力 $f_i(t)$ 與 $y_p(t)$ 反向，即相位差 180°，而慣性力之大小(或稱振幅 amplitude）F_i 如下：

$$F_i = m\omega^2 y_0$$

$$= 128 \times (15)^2 \times 13.7 = 395.79 \times 10^3\ lb$$

阻尼力 $f_d(t) = c\dot{y}_p(t) = -i\, c\omega\, y_p(t)$

所以阻尼力 $f_d(t)$ 與 $y_p(t)$ 相位差 90° ，$f_d(t)$ 超前 $y_p(t)$ 90°，如圖 8 所示，

阻尼力之大小 F_d 如下：

$$F_d = c\omega y_0$$

$$= 1125 \times 15 \times 13.7 = 231.19 \times 10^3 \text{ lb}$$

彈簧力 $f_s(t) = k\, y_p(t)$

所以彈簧力 $f_s(t)$ 與 $y_p(t)$ 同向(相位同)，其大小如下：

$$F_s = ky_0$$

$$= 100 \times 10^3 \times 13.7 = 1370 \times 10^3 \text{ lb}$$

慣性力、阻尼力、及彈簧力之向量如圖 8 所示，以上三者合向量應與 $p(t)$ 同(包括大小及相位)。

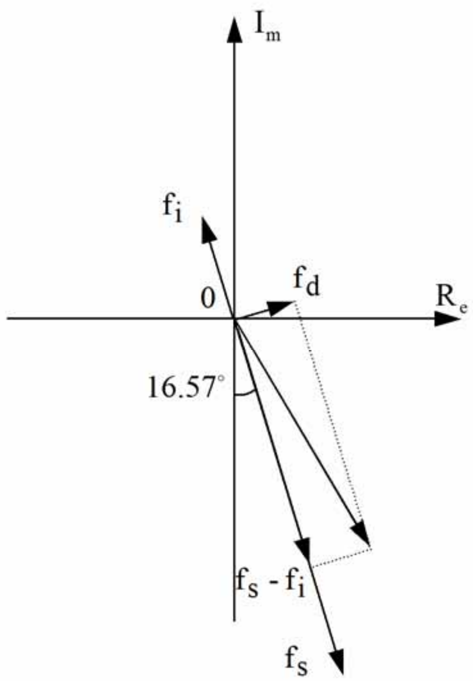


圖8 f_i, f_d 及 f_s 之相位圖

自由振動(Free Vibration)

如圖 5 所示之一度自由度系統做自由振動，即表示圖 5 中 $p(t) = 0$，或式(14)中 $p_1 = p_2 = 0$，如式(14)有根存在，則式(14)左邊矩陣之行列式必須等於零，故得

$$\left(-m\omega^2 + k\right)^2 + \left(c\omega\right)^2 = 0 \quad \cdots\cdots (22)$$

上式即為圖 5 所示之一度自由度系統之頻率方程式(frequency equation)。

式(22)可簡化變成

$$m\omega^2 \pm ic\omega - k = 0 \cdots\cdots (23)$$

或改寫為

$$\omega^2 \pm 2i\xi\omega_n\omega - \omega_n^{\ 2} = 0 \cdots\cdots (24)$$

上式中ξ及ω_n分別代表該系統之阻尼比及自然頻率。
式(24)為二次代數方程式，其解ω如下式所示：

$$\omega = \pm i\xi\,\omega_n \pm \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n \cdots\cdots (25)$$

因為一般系統之阻尼比遠小於 1.0(即ξ<1.0)，故式(25)可寫成

$$\omega = \pm i\xi\omega_n \pm \omega_d \cdots\cdots (26)$$

上式中ω_d為系統之阻尼頻率(damped frequency)，如下式

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n \cdots\cdots (27)$$

該系統之自由振動解(即齊次解)$y_h(t)$亦可由式(12)表示之，即

$$y_h(t) = (y_1 + iy_2)e^{i\omega t} \cdots\cdots (28)$$

取式(28)右邊之實數部份即為$y_h(t)$之物理量，故

$$y_h(t) = R_e(y_1 + iy_2)e^{i\omega t} \cdots\cdots (29)$$

為不使$y_h(t)$發散，所以式(26)右邊第一項應取正值，故

$$\omega = i\xi\omega_n \pm \omega_d \cdots\cdots (30)$$

將式(30)代入式(29)得$y_h(t)$之解為

$$y_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) \cdots\cdots (31)$$

式(31)常數 A 及 B 可由系統之初始條件決定之。
如該系統之阻尼比為零，為一無阻尼系統(undamped system)，即$\xi = 0$，及

$\omega_d = \omega_n$ ，所以式(31)變成

$$y_h(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \cdots\cdots (32)$$