

見かけの固有振動数問題を回避した境界要素法による  
音響問題の新しい設計感度解析法\*荒井雄理\*<sup>1</sup>, 田中正隆\*<sup>2</sup>, 松本敏郎\*<sup>3</sup>A New Design Sensitivity Analysis of Acoustic Problems  
Based on Bem Avoiding Fictitious Eigenfrequency IssueYouri ARAI, Masataka TANAKA\*<sup>4</sup> and Toshiro MATSUMOTO\*<sup>4</sup> Mechanical Systems Engineering, Shinshu University,  
4-17-1 Wakasato, Nagano-shi, Nagano, 380-8553 Japan

This paper presents a new design sensitivity analysis based on the boundary element method avoiding the fictitious eigenfrequency issue in acoustic problems. The direct differentiation method is applied to the derivation of sensitivity formulas. In solving an external acoustic problem with internal sub-domains by means of the boundary integral equation without any care, numerical solution is violated at the so-called fictitious eigenfrequencies corresponding to the internal sub-domains. The present paper proposes a new boundary element sensitivity analysis avoiding such a fictitious eigenfrequency problem. This is based on the dual boundary integral equation, proposed previously by the authors, and the integral expressions are differentiated directly with respect to the design parameters. One equation is the combined boundary integral equation proposed by Burton-Miller and the other is the normal derivative boundary integral equation multiplied by the same coupling parameter as in the Burton-Miller expression. The quadrilateral element is employed in this study. The Burton-Miller integral expression is used only at the middle nodes of element, while the normal derivative boundary integral equation multiplied by the same coupling parameter is applied to the vertex nodes of element, and vice versa. The effectiveness of the proposed approach is illustrated through some numerical examples for three-dimensional problems.

**Key Words:** Computational Mechanics, Sensitivity Analysis, Boundary Element Method, Acoustics, Helmholtz Equation, Fictitious Eigenfrequency, Shape Optimization

## 1. 緒 言

最適設計や逆問題の解析においては、設計変数に対する感度係数を精度よく効率的に計算することが必要となる。感度係数は設計変数に対する系の応答の変化率であり、最も簡便な方法は、設計変数を実際に少しだけ変化させたときの系の応答の変化量を計算し、その差を設計変数の変化量で割って計算する方法である。このような差分による計算法では、感度係数を求めるために1つの設計変数に対して少なくとも2回、系の応答を求めなくてはならず、効率的ではない。そこで本研究では境界積分方程式を設計変数で微分した方程式から感度係数を計算する直接微分法を用いる<sup>(1)(2)</sup>。

Helmholtz 方程式に支配される音場の問題において、境界積分方程式を用いて無限の広がりを持つ領域を

取り扱う外部問題あるいは、領域に穴が開いていて補領域に有界な領域を含む内部問題を解く際に見かけの固有振動数問題の影響により数値解の精度が極端に低下する<sup>(3)~(5)</sup>。境界積分方程式を設計変数に関して微分した式より感度を計算する方法においては、境界積分方程式を解くことで得られる境界上の音圧、粒子速度が感度係数を計算する際に必要とされる<sup>(6)</sup>。そのため、解析する周波数が補領域の固有振動数に一致する場合は見かけの固有振動数問題の影響より境界積分方程式を解いて得られる境界値の精度が保証されないことが感度係数を計算する際の問題となる。

本報は、著者らが提案した見かけの固有振動数問題を回避する方法において用いられる2つの境界積分方程式をそれぞれ設計変数で微分した式を併用することで設計変数に対する感度係数を計算する方法を提案する。提案手法の有効性を、解析解が得られる無限の広がりを持つ領域内に表面が異なる速度で振動する呼吸球の問題、領域内に無界な補領域を含む内部問題の2つの問題について開発した数値解析コードにより解析を行うことで確認した。

\* 原稿受付 2006年10月13日。

\*<sup>1</sup> 准員, 信州大学大学院工学系研究科(〒380-8553 長野市若里4-17-1)。\*<sup>2</sup> 正員, フェロー, 信州大学工学部。\*<sup>3</sup> 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp

## 2. 理 論

境界積分方程式を設計変数に関して微分した方程式より感度係数を導出する場合、あらかじめ境界要素法の手順に従い境界上の音圧、粒子速度を計算し、それらの値を感度係数に関する境界積分方程式に代入して感度係数を計算することとなる。従って、境界上の諸量の精度が直接的に感度係数に影響するため、境界上の諸量を精度よく求めることが非常に重要となる。しかしながら、本研究で取り扱う Helmholtz 方程式に支配される音場の境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する補領域の固有振動数に等しい周波数において方程式系が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう見かけの固有振動数問題が生じる<sup>(3)~(5)</sup>。この問題を回避する手段として著者らは Burton - Miller 型の結合境界積分方程式と、法線方向導関数境界積分方程式にその結合係数を乗じた式の 2 式をソース点の位置により使い分ける方法を提案し、その有効性を確認した<sup>(7)~(8)</sup>。

本研究では、それら 2 つの境界積分方程式を設計変数で微分した方程式を併用することで見かけの固有振動数問題が生じる周波数においても高精度の感度係数を計算することができることを示すものとする。設計変数に関して微分された 2 つの方程式の使い分けは、高次の境界要素を想定し、ソース点が要素を構成する辺の中点にある場合は結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を設計変数に関して微分した式を適用し、ソース点がそれ以外の点にある場合は Burton - Miller 型の結合境界積分方程式を設計変数で微分した方程式を適用するものとした。ここで、2 つの積分方程式に関しては逆の使い分けの方法も考えられるが、どちらの使い分けに関しても同じ精度の結果が得られているため、本報では上記の使い分けに関する結果について言及するものとする。

以下に本研究で用いる境界積分方程式およびそれらの設計変数に関して微分した方程式の導出について記述する。

**2.1 境界積分方程式** 微小振幅の振動を考えるものとし、角振動数  $\omega$  で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次 Helmholtz 方程式となる<sup>(9)</sup>。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$  は音圧、 $f(x)$  は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 $k$  は波数であり  $c$  を音速とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2)$$

Helmholtz 方程式 (1) に対して境界要素法による定式化を行い関数  $f(x)$  として集中音源を想定することで、以下の正則化された境界積分方程式を得る<sup>(3)~(10)</sup>。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - Q^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) + I p^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし  $v(x)$  は粒子速度、 $I$  は集中音源の強さであり、 $x^s$  は音源の座標である。また、基本解の成分はそれぞれ次のようである。

$$p^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-ikr) \quad (4)$$

$$q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n} (x) \quad (5)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} (x) \quad (6)$$

ここで  $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離である。

通常の音響問題では、境界積分方程式 (3) を境界要素で離散化して音圧  $p$  と粒子速度  $v$  に関する代数方程式を求め、この方程式系に境界条件を適用して解けば良い<sup>(3)</sup>。しかしながら、前述のように見かけの固有振動数問題の影響により数値解の精度が低下する周波数が存在するため、本研究では以下に示す Burton - Miller 型の境界積分方程式 (7) と法線方向導関数境界積分方程式に同じ結合係数を乗じた式 (8) の 2 式をソース点の位置により使い分ける手法でこの問題を回避するものとする<sup>(7)~(8)~(11)~(12)</sup>。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) \right\} \\ & \times p(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) \right. \\ & \times (p(x) - p(y)) - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_m(y) \left. \right\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \left[ \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} \right. \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_m(y)) \\ & \times d\Gamma(x) \left. \right] + I (p^*(x^s, y) + \alpha \tilde{p}^*(x^s, y)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Gamma} (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_m(y)) d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho\alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_i(x) p_m(y)) d\Gamma(x) \right] \\ & + \alpha I \tilde{p}^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで  $\bar{() } = \partial()/\partial n(y)$ ,  $r_m = x_m - y_m$ ,  $\alpha$  は結合係数,  $n_m$  は外向き単位法線ベクトルの成分である。また, 基本解の各成分は以下ようになる。

$$\tilde{u}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (9)$$

$$\tilde{Q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (10)$$

$$\tilde{p}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (11)$$

$$\tilde{q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \left\{ 3(1 + ikr) - k^2 r^2 \right\} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + (1 + ikr) n_j(x) n_j(y) \right] \exp(-ikr) \quad (12)$$

## 2.2 感度係数に関する境界積分方程式

本研究では, 感度係数の計算法として境界積分方程式を設計変数で微分して感度係数に関する境界積分方程式を導出し, それを境界要素で離散化して解く手法を採用する。そこで2つの境界積分方程式(7), (8)を設計変数で微分することを考える。

音響問題の場合, 設計変数として物体の形状を規定するパラメータ, 周波数, 媒質密度, 境界上の音圧, 粒子速度, 集中音源の強さなどが考えられる。このような設計変数を想定して境界積分方程式(7), (8)を微分することでそれぞれ次式を得る。ただし,  $\dot{() }$  は設計変数に関する微分を表す。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) \right\} \\ & \times \dot{p}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{q}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) \right\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) \right. \\ & + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) \left. \right\} p(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) (\dot{p}(x) - \dot{p}(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) (r_m(x, y) p_{,m}(y) + r_m(x, y) \dot{p}_{,k}(y)) \right\} \\ & \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{Q}^*(x, y) + \alpha \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \dot{\tilde{Q}}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) \right\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) \right\} d\dot{\Gamma}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -i\omega\rho \left[ \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} \dot{v}(x) \right. \\ & \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{\dot{p}^*(x, y) + \alpha(\dot{\tilde{p}}^*(x, y) - \dot{\tilde{u}}^*(x, y))\} \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) \\ & + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} v(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) + n_m(x) \dot{p}_{,m}(y))\} \\ & \times d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\dot{\Gamma}(x) \left. \right] \\ & - i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \left[ \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} \right. \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) \\ & \times d\Gamma(x) \left. \right] + \dot{I}(p^*(x^s, y) + \alpha \tilde{p}^*(x^s, y)) \\ & + I(\dot{p}^*(x^s, y) + \alpha \dot{\tilde{p}}^*(x^s, y)) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Gamma} (\tilde{q}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) \dot{p}(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} (\dot{\tilde{q}}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} (\tilde{q}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) p(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) \{ \dot{p}(x) - \dot{p}(y) - (\dot{r}_m(x, y) p_{,m}(y) \\ & + r_m(x, y) \dot{p}_{,m}(y)) \} d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{Q}}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\dot{\Gamma}(x) \\ & = -i\omega\rho\alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) \dot{v}(x) d\Gamma(x) \right. \\ & + \int_{\Gamma} (\dot{\tilde{p}}^*(x, y) - \dot{\tilde{u}}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) \\ & + n_m(x) \dot{p}_{,m}(y))\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\dot{\Gamma}(x) \left. \right] \\ & - i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \\ & + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \left. \right] \\ & + \alpha (\dot{I}\tilde{p}^*(x^s, y) + I\dot{\tilde{p}}^*(x^s, y)) \quad (14) \end{aligned}$$

式(13), (14)は一見すると複雑であるが, 設計変数

の選択によっては省略可能な項が多く含まれている。例えば設計変数として物体の形状を規定するようなパラメータを選択した場合、形状に依存しない量  $\omega$ ,  $\rho$  による微分は全て考える必要がない。設計変数としてそのようなパラメータを選択した場合の基本解の設計変数による微分はそれぞれ以下ようになる。

$$\dot{p}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial x_i} (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. - (1 + ikr) n_j(x) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j(x) \right\} (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. + (1 + ikr) n_j(y) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^*(x, y) &= -\frac{1}{4\pi r^4} \left[ \{15(1 + ikr) - 6k^2 r^2 - ik^3 r^3\} \right. \\ &\quad \times \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} - \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \\ &\quad \times \left( n_k(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) - n_k(y) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \right. \\ &\quad \left. \left. - n_j(x) n_j(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \left( \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) + (1 + ikr) (\dot{n}_j(x) n_j(y) \right. \\ &\quad \left. + n_j(x) \dot{n}_j(y)) \right] \exp(-ikr) \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_j(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}^*(x, y) &= -\frac{1}{4\pi r^4} \left\{ \left( 15 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3n_j(x) n_j(y) \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} - \left( 3n_k(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_k(y) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \right) \right\} (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \left( \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{n}_j(x) n_j(y) + n_j(x) \dot{n}_j(y) \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

また、微小面積要素  $d\Gamma$  および外向き単位法線ベクトル  $n_i$  の設計変数による微分はそれぞれ次式のようになる。

$$d\dot{\Gamma} = \left\{ (\dot{x}_i)_{,i} - (\dot{x}_i)_{,j} n_j n_i \right\} \quad (22)$$

$$\dot{n}_i = \left\{ (\dot{x}_j)_{,k} n_j n_k n_i - (\dot{x}_j)_{,i} n_j \right\} \quad (23)$$

式(22), (23)には座標感度の勾配が含まれている。本研究ではこれらの微分量を次のように評価する。

いま、式(13), (14)を離散化したときの要素内の局所座標を  $(\xi, \eta)$  とすると  $d\Gamma$  は次のように表される。

$$d\Gamma = \left| e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (24)$$

ただし、 $e_{ijk}$  は交代記号であり、 $J(\xi, \eta)$  は以下のように置いた。

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta) &= \left| e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \right| \\ &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25) \end{aligned}$$

従って  $d\dot{\Gamma}$  は以下のようになる。

$$d\dot{\Gamma} = \dot{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{\dot{J}(\xi, \eta)}{J(\xi, \eta)} d\Gamma \quad (26)$$

ただし、 $\dot{J}$  は以下のものである。

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right) \quad (27) \end{aligned}$$

よって式(13), (14)を離散化した式においては式(22)の代わりに式(26)を用いれば、座標感度の情報のみで  $d\dot{\Gamma}$  を計算することが可能となる。同様に  $\dot{n}_i$  についても以下のように表すことができるため、座標感度の情報のみで評価可能となる。

$$\dot{n}_i = \frac{1}{J} e_{ijk} \left( \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} + \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{J} e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \quad (28)$$

**2.3 感度係数の導出手順** 境界積分方程式を設計変数で直接微分した方程式より境界値の感度係数を導出する手順について考察する。

式(7), (8)をソース点の位置で使い分けることを考慮し, 境界要素で離散化することで以下の代数方程式に帰着する。

$$[H] \{p\} = [G] \{v\} + \{f\} \quad (29)$$

ただし,  $[H]$ ,  $[G]$  はそれぞれ音圧  $p$  と粒子速度  $v$  に関する係数行列であり, これらの行列の成分は2つの境界積分方程式(7)および(8)を評価することで得られるものであり,  $\{f\}$  は集中音源に関する項となる。得られた代数方程式にあらかじめ規定されている境界条件を適用し, 境界既知量と未知量に分けることで次式を得る。

$$[A] \{X\} = [B] \{Y\} + \{f\} \quad (30)$$

ただし,  $[A]$  は未知の境界節点値に関する行列,  $\{X\}$  は未知境界量を集めたベクトル,  $[B]$  は既知境界量に関する行列,  $\{Y\}$  は既知境界量に関するベクトルである。式(30)を解くことで境界上の全ての音圧, 粒子速度が求められる。

式(13), (14)の2つの境界積分方程式をソース点の位置により使い分けることに注意し, 同様に境界要素で離散化することで以下の感度係数に関する代数方程式を得る。

$$[H'] \{\dot{p}\} = [G'] \{\dot{v}\} + [h'] \{p\} + [g'] \{v\} + \{f'\} \quad (31)$$

ここで,  $[H']$  および  $[G']$  はそれぞれ音圧の感度係数  $\{\dot{p}\}$ , 粒子速度の感度係数  $\{\dot{v}\}$  に関する係数行列であり,  $[h']$ ,  $[g']$  はそれぞれ境界上の音圧  $p$  と粒子速度  $v$  に関する係数行列である。式(13), (14)より音圧および粒子速度の感度係数に関する係数は, これらの式の併用方法を境界未知量を導出する際の使い分けと等しくすることでそれぞれ  $[H'] = [H]$ ,  $[G'] = [G]$  となることがわかる。音圧  $p$  または粒子速度  $v$  が境界条件で与えられている境界節点では  $\dot{p}$ ,  $\dot{v}$  もまた既知となることに注意すれば最終的に以下の方程式に帰着する。

$$[A] \{\dot{X}\} = [B] \{\dot{Y}\} + [h'] \{p\} + [g'] \{v\} + \{f'\} \quad (32)$$

境界値の感度係数を計算するためには, 式(30)と(32)を解かなければならないため計算時間の増加が懸念される。しかしながら前述に述べたように未知の境界値にかかる行列と未知の境界値の感度係数に関する行列が等しいことより, 式(30)を解く際に行列  $[A]$  をLU分解しておけば式(32)を解く際の計算時間を短縮することができる。

### 3. 数 値 解 析

以下に解析解が得られる呼吸球の問題, および領域内に孤立した有界な領域を含む問題についてそれぞれ式(3)とその積分方程式を設計変数に関して微分した方程式(式(13)において  $\alpha = 0$  とした式)を適用して得られた結果(以下 OBIE)およびソース点の位置により2つの境界積分方程式を使い分ける手法(以下 Hybrid method)を適用して得られた結果についてそれぞれ示す。Hybrid method を適用する際の境界積分方程式は図1に示すように, 要素の辺の midpoint にソース点がある場合は式(7), (13)を, 一方ソース点要素の頂点にある場合は式(8), (14)を適用するものとした。結合係数に関しては Cunefare - Koopmann<sup>(13)</sup>らに従って  $i/k$  とした。なお, 数値計算は倍精度実数型および倍精度複素数型で計算を行った。

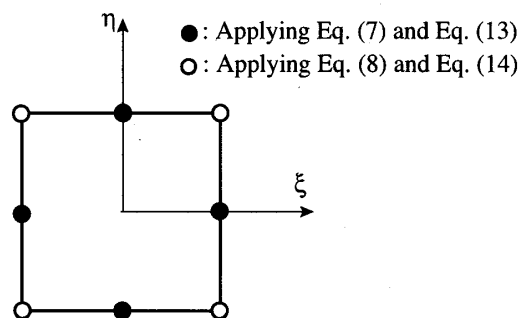


Fig. 1 Quadratic boundary element

**3.1 例題解析 1** 図2の左図に示すように, 無限空間内に境界表面が一樣な粒子速度  $v$  で振動する呼吸球を考える。媒質密度  $\rho = 1.2$  [kg/m<sup>3</sup>], 伝播速度  $c = 340$  [m/s], 呼吸球の半径  $a = 0.2$  [m] とした。呼吸球の表面は  $v = 1.0$  [m/s] の境界条件を与えた。要素分割は図2の右図に示すように球の1/8の面に対して四角形境界2次要素を用いて要素数18で離散化を行った。総節点数は434, 要素数は144である。評価点は境界表面上に3点配置した。周波数は1 [Hz] ~ 2 [kHz] を1 [Hz] 刻みで解析を行った。設計変数は呼吸球の半径  $a$  とし, 次式で与えられる音圧の感度係数の解析解(33)と数値解析により得られるそれぞれの評価点での設計変数に関する音圧の感度係数の絶対値の平均値とを比較したものである。ただし, 式(33)において  $z = \rho c$  である。

$$\dot{p}(r) = -\frac{vzka(2ir - akr - ia + a^2k)}{(-i + ka)^2 r^2} \times \exp\{-ik(r - a)\} \quad (33)$$

図3にそれぞれ OBIE を適用して得られた結果および Hybrid method を適用して得られた結果を解析

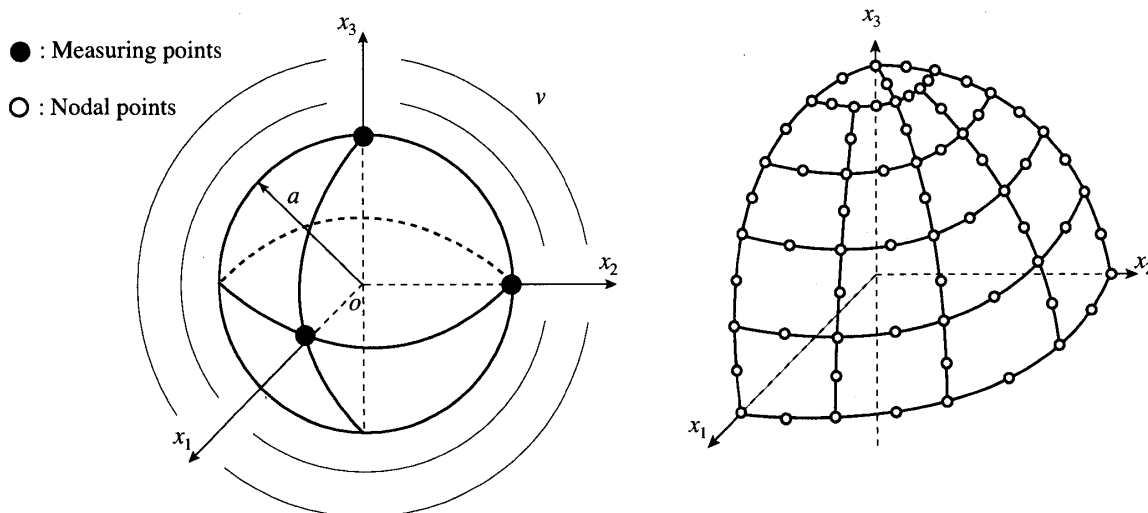


Fig. 2 Analysis model 1 and its boundary element discretization

した全波数域において解析解との相対誤差をとったものを比較して示す。数値解析結果より、OBIEを適用した場合見かけの固有振動数問題の影響がでる  $ka = n\pi, (n = 1, 2, \dots)$  の近傍において数値解の精度が極端に低下していることがわかる。しかし、Hybrid methodを適用した場合は見かけの固有振動数問題の影響が回避できているため、どの周波数においても精度の良い数値解を得ていることがわかる。ただし、周波数が高くなるにつれて解析解との誤差が増加しているが、これは要素数を固定して解析を行っていることが原因だと考えられる。

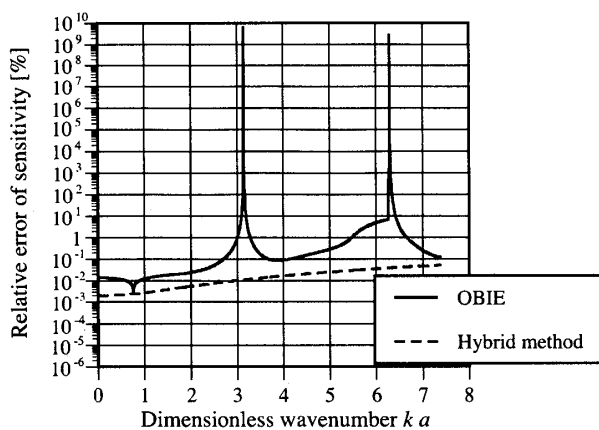


Fig. 3 Comparison of numerical results obtained by applying OBIE and Hybrid method

図4に、この問題において見かけの固有振動数の影響が生じる  $ka = \pi$  近傍付近で周波数の刻みを細かくして数値解析を行った数値結果を示す。解析を行った周波数は具体的に 849 [Hz] ~ 851 [Hz] (波数  $ka = 3.1378 \sim 3.1453$ ) であり、周波数域を 0.1 [Hz]

刻みで数値解析を行った。

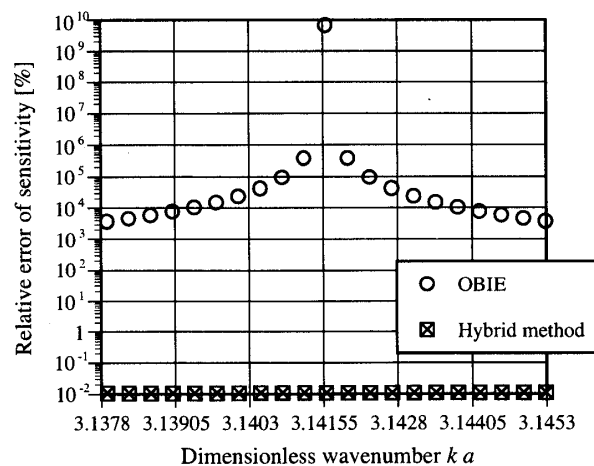


Fig. 4 Comparison of numerical results between  $ka = 3.1378$  and  $3.1453$  obtained by applying OBIE and Hybrid method

数値解析結果より、OBIEを適用した場合は見かけの固有振動数問題の影響より、設計変数に対する音圧の感度係数の精度が極端に低下していることがわかる。一方、Hybrid methodを適用した場合は、見かけの固有振動数問題の影響を回避できているため、設計変数に関する音圧の感度係数が精度良く求められていることがわかる。

3.2 例題解析 2

図5の左図に示すように半径  $a_1$  を有する剛体の球の内部に半径が  $a_2$  で境界表面が一様な粒子速度  $v$  で振動している呼吸球が存在する問題を考える。考察領域  $\Omega$  は外側の球と内側の球に囲まれた領域とした。外側の球の半径  $a_1 = 0.25$  [m]、内側の球の半径  $a_2 = 0.1$  [m] とし、媒質密度  $\rho = 1.2$  [kg/m<sup>3</sup>],

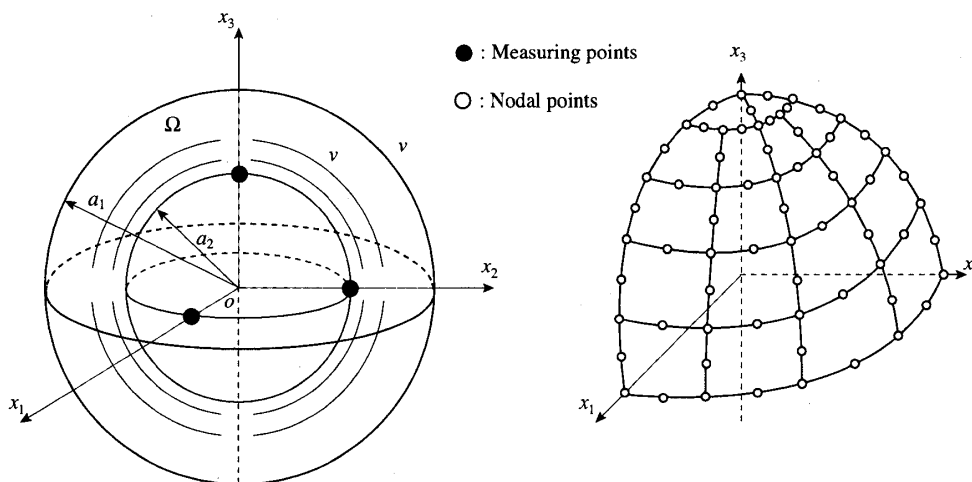


Fig. 5 Analysis model 2 and its boundary element discretization

伝播速度  $c = 340$  [m/s] とした。境界条件は、外側の球は  $v = 0.0$  [m/s], 内側の呼吸球は  $v = 1.0$  [m/s] の境界条件をそれぞれ与えた。要素分割は図5の右図に示すように外側の球, および内側の呼吸球の 1/8 部分を四角形境界 2 次要素を用いてそれぞれ 18 要素で離散化を行った。総節点数 868, 総要素数 288 である。評価点は内側の呼吸球の境界表面上に 3 点配置した。設計変数は内側の球の半径  $a_2$  とした。数値結果として示すのはそれぞれの評価点で得られた設計変数に対する音圧の感度係数の絶対値の平均値を示した。なお、この問題においては厳密解が求まらないため、見かけの固有振動数問題に有効である Burton - Miller 法と各手法で得られた数値解との比較を行った。

図6にこの問題において見かけの固有振動数問題の影響が生じない周波数域 100 [Hz] から 200 [Hz] (波数  $ka_2 = 0.183 \sim 0.369$ ) を 1 [Hz] 刻みで解析した数値結果を示す。各手法ともほぼ同等の数値解を与えていることがわかる。

図7にこの問題において見かけの固有振動数問題の影響が生じる  $ka_2 = \pi$  付近における OBIE を適用した数値結果および Hybrid method を適用して得られた数値結果を, Burton - Miller 法を適用して得られた結果と比較して示す。周波数は, 1690 [Hz] から 1709 [Hz] (波数  $ka_2 = 3.123 \sim 3.158$ ) を 1 [Hz] 刻みで解析を行った。

数値結果より OBIE を適用した場合, その周波数の近傍で見かけの固有振動数問題の影響により数値解の精度が低下していることがわかるが, Hybrid method を適用した場合は Burton - Miller 法と同等の数値結果が得られており, 見かけの固有振動数問題の影響を回避した解が得られていることがわかる。

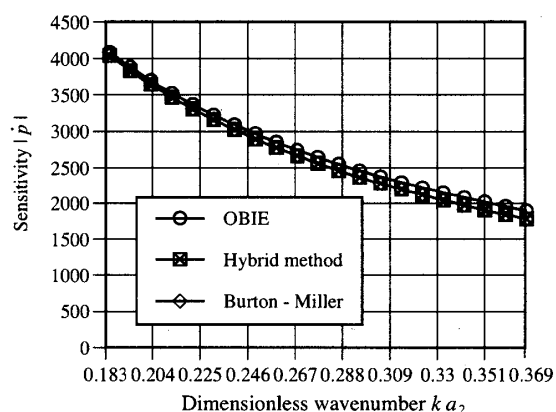


Fig. 6 Comparison of numerical results between  $ka_2 = 0.183$  and  $0.369$  obtained by applying OBIE and Hybrid method, Burton - Miller

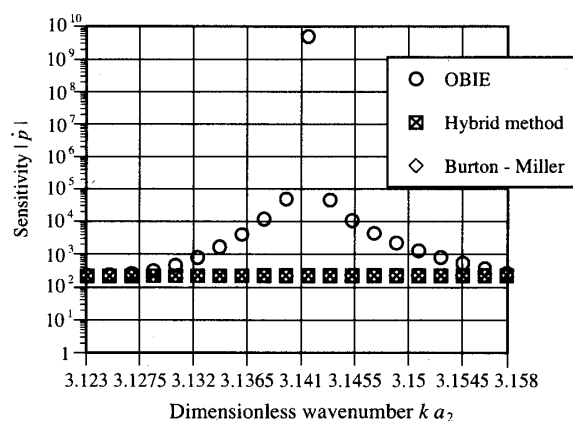


Fig. 7 Comparison of numerical results between  $ka_2 = 3.123$  and  $3.158$  obtained by applying OBIE and Hybrid method, Burton - Miller

Table 1 Comparison of CPU TIME (sec)

| OBIE   | Hybrid method | Burton - Miller |
|--------|---------------|-----------------|
| 62.328 | 94.281        | 94.359          |

表1に図5のモデルに対して各手法を適用した場合の計算時間を示す。計算は市販のパーソナルコンピュータ DELL PRECISION 380 にて行った。各計算時間を比較すると、OBIEを適用する場合が最も計算時間が早いことがわかるが、見かけの固有振動数問題を回避できない。従って、OBIEを適用する場合は、見かけの固有振動数問題が生じない問題に対してのみ有効であるといえる。一方、Hybrid methodはOBIEより計算時間がかかるものの、Burton - Miller法と比べると差異がみられる。このことより、Hybrid methodは見かけの固有振動数問題を含む問題に対しては効率的にこの問題を回避する手法であると考えられる。

#### 4. 結 論

Helmholtz方程式に支配される3次元定常音響問題における見かけの固有振動数問題を回避した、境界積分方程式を設計変数に関して直接微分する直接微分法に基づいた新しい設計感度解析法の提案を行い、その有効性を解析解が得られる呼吸球の外部問題および内部に孤立した補領域を有する内部問題の2つに対して提案手法に基づく数値プログラムを用いて解析を行うことで確認した。また、計算時間の比較より、本手法は多くの要素分割を必要とする高周波数域の問題、反復計算を必要とするような手法による音場の逆問題等に有用であると考えられる。

今後、本設計感度解析法を適用した音場の形状最適化問題や音響逆問題等に取り組む予定である。

#### 文 献

- (1) Barone, M. R. and Yang, R. J., Boundary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivities in Shape Optimization, *AIAA J.*, Vol.26, (1988), pp.589-594.
- (2) Sarigül, A. S. and Seçgin, A., A Study on the Applications of the Acoustic Design Sensitivity Analysis of Vibrating Bodiess, *Applied Acoustics.*, Vol.65, Issu 11, (2004), pp.1037-1056.
- (3) Tanaka, M, et al., *Boundary Element Method*, (in Japanese), (1991), Baifukan.
- (4) Kobayashi, S. et al., *Wave Analysis and Boundary Element Method*, (in Japanese), (2000), Kyoto University Press Online.
- (5) Chen, I. A. et al., Analytical Study and Numerical Experiments for Radiation and Scattering Problems Using The CHIEF Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.248, (2001), pp.809-828.
- (6) Matusmoto, T. et al., Design Sensitivity Analytis of Steady - State Acoustic Problems Using Boundary Integral Equation Formulation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.59, No.558, (1993), pp.430-435.
- (7) Tanaka, M. et al., A Boundary Element Analysis for Avoiding the Fictitious Eigenfrequency Problem in Acoustic Field (2nd Report : Revised Version), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.72, No.719, (2006), pp.2088-2093.
- (8) Burton, A. J. and Miller, G. F., The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems, *Journal of Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol.323, (1971), pp.201-210.
- (9) Acoustical Society of Japan (ed.), *Basic Acoustical Engineering*, (in Japanese), (1990), Corona Publishing Co.,Ltd.
- (10) Matsumoto, T. and Tanaka, M., An Alternative Discretization Technique for Regularized Boundary Integral Equation, *Transactions of the JASCOME, Journal of BEM technology conference*, Vol.1, (1991), pp.7-12.
- (11) Arai, M. et al., Highly Accurate Analysis by Boundary Element Method Based on Uniform Gradient Condition (Application for Formulation of Classical Potential Problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.61, No.581, (1995), pp.161-168.
- (12) Matsumoto, T. et al., Evaluation of the Hypersingular and Regularized Boundary Integral Equations for the Boundary Potential Gradients in 2D Field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.64, No.619, (1998), pp.743-750.
- (13) Cunefare, K. A. and Koopmann, G., A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.85, No.1, (1989), pp.39-48.
- (14) Yuuki, R. and Kisu, H., *Boundary Element Method for Elastic Analysis*, (in Japanese), (1987), Baifukan.
- (15) Itô, T., *Acoustic Engineering*, (in Japanese), (1977), Denkishoin Co.,Ltd.