

見かけの固有振動数問題を回避する3次元音場の
新しいBEM解析法*荒井雄理*¹, 田中正隆*², 松本敏郎*³A New Boundary Element Analysis of 3-D Acoustic Fields
Avoiding the Fictitious Eigenfrequency ProblemYouri ARAI, Masataka TANAKA*⁴ and Toshiro MATSUMOTO*⁴ Mechanical Systems Engineering, Shinshu University,
4-17-1 Wakasato, Nagano-shi, Nagano, 380-8553 Japan

This paper is concerned with a new approach for avoiding the fictitious eigenfrequency problem in boundary element analysis of three-dimensional acoustic problems governed by Helmholtz equation. It is well known that, in solving without any care an external acoustic problem with internal sub-domains by means of the boundary integral equation, its numerical solution is violated at so-called fictitious eigenfrequencies corresponding to the internal sub-domains. The present paper proposes a new boundary element analysis to circumvent such a fictitious eigenfrequency problem by using dual boundary integral equation for nodal points on the boundary. One equation is the combined integral equation proposed by Burton-Miller. The other equation is the normal derivative boundary integral equation multiplied by the same coupling parameter as in the Burton-Miller expression. The quadrilateral element is employed in this study, and the Burton-Miller combined boundary integral equation is used at the middle nodes of element, while only the normal derivative boundary integral equation multiplied by the same coupling parameter is applied to the vertex nodes of element, and vice versa. The proposed approach is implemented, and its validity and effectiveness are demonstrated through numerical computation of the typical problems.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Acoustics, Sound, Helmholtz Equation, Integral Equation, Fictitious Eigenfrequency

1. 緒 言

Helmholtz 方程式により支配される音響問題において、境界積分方程式を用いて無限領域を含む外部境界値問題を解く場合あるいは、内部問題において領域内に有限な孤立部分があるような問題を解く場合に、見かけの固有振動数問題の影響により解の精度が著しく低下するという問題が生じる^{(1)~(3)}。見かけの固有振動数問題が生じる原因は、外部問題や、領域に穴が開いていて補領域に有限な孤立部分がある問題では、積分方程式がそれらの領域における音圧が0となることを保証しないことである。このことより、Helmholtz 方程式に支配される境界値問題を取り扱う場合、この問題を回避して精度の良い解を求めることが重要になる。

見かけの固有振動数問題を回避するために、具体的に以下のような対策が取られている。

1. 考えている領域の補領域にいくつかの点(外点)を配置し、最終的な方程式系を最小二乗法で解く⁽⁴⁾
2. 通常の境界積分方程式とそれを微分した導関数境界積分方程式を線形結合した式を境界積分方程式として解く(Burton - Miller)⁽⁵⁾
3. 補領域で音圧が0となるように基本解を修正した積分方程式で解く⁽⁶⁾
4. 見かけの固有振動数に対応する解をその周辺の振動数に対する解を補間して求める⁽⁷⁾

本論文では見かけの固有振動数問題を回避する手法として、高次要素について全ての節点に Burton - Miller により提案された結合した境界積分方程式を適用するのではなく、ソース点の位置により結合した境界積分方程式とその結合係数を乗じた法線方向導関数境界積分方程式の2式を併用する方法を提案する。この手法に関して著者らは以前2次元問題に対してその有効性を示しており⁽⁸⁾、本報では3次元問題に対しての適用について示す。解析解が得られる呼吸球の問題および内部問題の領域内に有限な孤立領域が存在する2種

* 原稿受付 2006年7月10日。

*¹ 准員, 信州大学大学院工学系研究科(☎ 380-8553 長野市若里 4-17-1)。*² 正員, 信州大学工学部。*³ 正員, 名古屋大学大学院工学系研究科(☎ 464-8603 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp

類の問題に対して提案手法を適用して得られた結果と Burton - Miller の手法を全節点で適用した場合の結果と比較することで本手法の有効性を示す。

2. 理 論

本研究で取り扱う Helmholtz 方程式に支配される音場の境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する内部問題の固有振動数に等しい周波数において方程式系が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう。これを見かけの固有振動数問題と呼んでいる⁽²⁾。本報では、四角形2次元境界要素を用いる場合について新しい回避手法を提案する。すなわち、境界上の全節点に対して Burton - Miller 型の結合境界積分方程式を適用するのではなく、要素を構成する節点で結合境界積分方程式とその結合係数を乗じた導関数境界積分方程式の2式を使い分けることで見かけの固有振動数問題を回避する手法である。

本手法は、Burton - Miller の結合型の境界積分方程式を全節点に適用する方法に比べて節点値に関する係数行列の作成が効率的である。なぜなら、結合型の境界積分方程式を全節点に適用する際には、全ての点で境界積分方程式とその法線方向導関数境界積分方程式に関する基本解の成分を計算しなければならないのに対して、本手法はソース点の位置によっては法線方向導関数境界積分方程式に関する基本解の成分のみを計算するだけでよい。このことより、本手法は Burton - Miller により提案された結合型の境界積分方程式を全節点に適用するという方法よりも効率的に係数行列を作成することができ、かつ見かけの固有振動数問題を回避できる利点があるといえる。2つの式の適用方法に関しては、要素頂点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用し、中間節点で結合境界積分方程式を適用する、あるいは要素頂点で結合境界積分方程式を適用し、中間節点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用するという2つの可能性について考えた。どちらの適用方法でも見かけの固有振動数の影響を回避した解が得られていることを確認しているが、本報では前者の適用方法による数値結果を示す。

以下に本研究で用いる境界積分方程式とその法線方向導関数境界積分方程式の定式化について簡単に記述する。そして、本手法がなぜ見かけの固有振動数問題を回避した解が得られるかについての考察を行う。

2.1 境界積分方程式 微小振幅の振動を考慮のものとし、角振動数 ω で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次 Helmholtz 方程式

となる⁽⁹⁾。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$ は音圧、 $f(x)$ は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 k は波数であり c を音速とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2)$$

式(1)において、境界条件は以下のように与えられる。

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad (3)$$

$$q(x) = \frac{\partial p}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad (4)$$

ただし、 $q(x)$ は境界の外向き法線方向の粒子速度 $v(x)$ と媒質密度 ρ を用いて以下のように表すことができる。

$$q(x) = -i\omega\rho v(x) \quad (5)$$

Helmholtz 方程式(1)に対して境界要素法による定式化を行い関数 $f(x)$ として集中音源を想定することで、以下の正則化された境界積分方程式を得る⁽¹⁾⁽¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - Q^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) + Ip^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし I は集中音源の強さであり、 x^s は音源の座標である。また、基本解の成分はそれぞれ次のようである。

$$p^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-ikr) \quad (7)$$

$$q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (8)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (9)$$

ここで r はソース点 y と観測点 x との距離である。

2.2 法線方向導関数境界積分方程式 本研究で用いる法線方向導関数境界積分方程式は、境界積分方程式(6)をソース点 y で微分した関係を正則化した表示式を用いる。以下にはその導出手順を示すが、説明を簡潔にするために、正則化に関わりが無い集中音源に関する項は途中の表示式では省略してあることに注意されたい。式(6)をソース点 y で微分した次式を考

える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & - \left\{ \int_{\Gamma} Q^*(x, y) d\Gamma(x) \right\} p_{,j}(y) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、基本解の微分 $p_{,j}^*(x, y)$ は以下のように正則な部分と特異な部分に分けることができる⁽¹⁰⁾。

$$p_{,j}^*(x, y) = p_{R,j}^*(x, y) + u_{,j}^*(x, y) \quad (11)$$

$p_{R,j}^*(x, y)$ は正則な項であり、 $u_{,j}^*(x, y)$ は Laplace の基本解の微分であり特異性を有する項である。また、式(10)の左辺第3項はソース点 y の位置により決まる定数 $c(y)$ との関係があり、それと式(11)を考慮することで式(10)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} c_{ij}(y) p_{,i}(y) + \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{p_{,j}^*(x, y) - u_{,j}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ - i\omega\rho \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)において基本解 $u_{,j}^*(x, y)$ および $Q_{,j}^*(x, y)$ は3次元問題の場合、それぞれ $O(1/r^2)$ と $O(1/r^3)$ の特異性を有している。そこで、積分を直接数値的に評価可能にするために、音圧の勾配が一様である場を考慮して正則化を行う⁽¹¹⁾。一様な音圧勾配の場において $p(x)$ および $q(x)$ はそれぞれ以下ようになる。

$$p(x) = p(y) + r_m(x, y) p_{,m}(y) \quad (13)$$

$$q(x) = n_m(x) p_{,m}(y) \quad (14)$$

ここで $r_m = x_m - y_m$ であり、 n_m は外向き単位法線ベクトルの成分である。式(13)、(14)を Laplace 方程式の正則化された境界積分方程式を微分した関係式⁽¹²⁾に代入すれば、次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c_{ij}(y) p_{,i}(y) + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y) n_m(x) p_{,m}(y) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (15)$$

式(12)から式(15)を差し引き、両辺に $n_j(y)$ を乗じ、これまで省略していた集中音源に関する項を追加す

ば、以下の正則化された法線方向導関数境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) \{p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ & - i\omega\rho \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ & + I\tilde{p}^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (16)$$

ただし $\tilde{() } = \partial()/\partial n(y)$ であり、基本解の各成分は以下ようになる。

$$\tilde{u}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (17)$$

$$\tilde{Q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (18)$$

$$\tilde{p}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left[\{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\ \left. + (1 + ikr) n_j(x) n_j(y) \right] \exp(-ikr) \end{aligned} \quad (20)$$

本報で提案する手法は、導出した2つの境界積分方程式(6)と(16)について、2つの式を線形結合した式と結合係数を式(16)に乗じた式をソース点の位置により使い分ける手法である。

2.3 提案手法に関する考察 本節では、提案手法を適用することにより得られる解について、図1に示すような外部問題を例として考える。図1において Ω が無限遠に広がる考察領域であり、 $\bar{\Omega}$ は補領域である。見かけの固有振動数問題が生じる原因は、解析する周波数が内部領域 $\bar{\Omega}$ における固有振動数に一致すると、解 p が一意でなくなり、内部領域 $\bar{\Omega}$ で音圧が0となることを保証しなくなることである。考える問題が内部問題であればそれは固有振動現象に対応するが、外部問題においては数値解析上意味のない解が得られてしまう。このことについて、提案手法を適用した場合の解に関して考察を行う。

本手法は Burton - Miller により提案された結合した境界積分方程式(21)と、その結合係数を法線方向導関数境界積分方程式に乗じた式(22)の2式をソース点 y の位置により使い分けて見かけの固有振動数問題を回避するものである。そこで、 y が境界 Γ_1 上にある場

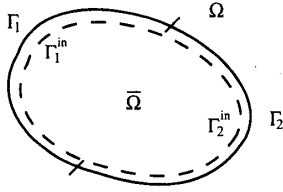


Fig. 1 External problem

合は結合した境界積分方程式 (21) を, Γ_2 上にある場合は式 (22) を適用すると考える. ただし, Γ_1 および Γ_2 はそれぞれ全境界 Γ の一部であり, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ である.

$$-\frac{1}{2} \{p(y) + \alpha q(y)\} + \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) + \alpha \bar{q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha \bar{p}^*(x, y)\} q(x) d\Gamma(x) = 0, \quad y \text{ on } \Gamma_1 \quad (21)$$

$$-\frac{1}{2} \alpha q(y) + \alpha \int_{\Gamma} \bar{q}^*(x, y) p(x) d\Gamma(x) - \alpha \int_{\Gamma} \bar{p}^*(x, y) q(x) d\Gamma(x) = 0, \quad y \text{ on } \Gamma_2 \quad (22)$$

式 (21), (22) においてソース点 y を内部領域 $\bar{\Omega}$ に移行すると次式を得る.

$$\int_{\Gamma} \{q^*(x, y) + \alpha \bar{q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha \bar{p}^*(x, y)\} q(x) d\Gamma(x), \quad y \text{ in } \bar{\Omega} \quad (23)$$

$$\alpha \int_{\Gamma} \bar{q}^*(x, y) p(x) d\Gamma(x) = \alpha \int_{\Gamma} \bar{p}^*(x, y) q(x) d\Gamma(x), \quad y \text{ in } \bar{\Omega} \quad (24)$$

ここで式 (23), (24) において $p(x) \neq 0$ でそれぞれの式の左辺が恒等的に 0 となる場合, 解の一意性は失われる. 従って, 本手法が見かけの固有振動数問題を回避しているかを確認するには, 以下の 2 つの式が自明解 $p(x) = 0$ のみを有することを示せば良い.

$$\int_{\Gamma} \{q^*(x, y) + \alpha \bar{q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) = 0, \quad y \text{ in } \bar{\Omega} \quad (25)$$

$$\alpha \int_{\Gamma} \bar{q}^*(x, y) p(x) d\Gamma(x) = 0, \quad y \text{ in } \bar{\Omega} \quad (26)$$

ここで未知の密度関数 $p(x)$ により生成される二重層ポテンシャルは以下ようになる.

$$W(y) = \int_{\Gamma} q^*(x, y) p(x) d\Gamma(x), \quad y \in \Omega, \bar{\Omega}, \Gamma \quad (27)$$

ここで, 境界 Γ の内側に滑らかな境界 $\Gamma^{\text{in}} = \Gamma_1^{\text{in}} \cup \Gamma_2^{\text{in}}$ (図 1) を仮定し, ソース点 y がその境界上にあるとする. 式 (27) を考えることで式 (25), (26) はそれぞれ以下のように書くことができる.

$$W(y) + \alpha \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} = 0, \quad y \text{ on } \Gamma_1^{\text{in}} \quad (28)$$

$$\alpha \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} = 0, \quad y \text{ on } \Gamma_2^{\text{in}} \quad (29)$$

ここで式 (28) および (29) を満足する二重層ポテンシャルが $W(y) = 0$ であることを導く. $W(y)$ とその共役 $\bar{W}(y)$ に対して Green の第 2 定理を適用することで次式を得る.

$$\int_{\Gamma_1^{\text{in}}} \left\{ \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} \bar{W}(y) - W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n_y} \right\} d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_2^{\text{in}}} \left\{ \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} \bar{W}(y) - W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n_y} \right\} d\Gamma(y) = 0 \quad (30)$$

式 (29) より結合係数 $\alpha \neq 0$ であるならば Γ_2 上で $\partial W(y)/\partial n_y = \partial \bar{W}(y)/\partial n_y = 0$ となり, 式 (30) は以下ようになる.

$$\int_{\Gamma_1^{\text{in}}} \left\{ \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} \bar{W}(y) - W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n_y} \right\} d\Gamma(y) = 0 \quad (31)$$

式 (31) を式 (28) を考慮して変形することで次式を得る.

$$2i \text{Im}(\alpha) \int_{\Gamma_1^{\text{in}}} \left| \frac{\partial W(y)}{\partial n_y} \right|^2 d\Gamma(y) = 0 \quad (32)$$

式 (32) において $\text{Im}(\alpha) \neq 0$ であるならば Γ_1 上で $\partial W(y)/\partial n_y = 0$ となり式 (28) より $W(y) = 0$ となる. 従って式 (27) より $p(x) = 0$ が導かれる.

以上より本手法を適用した場合, 内部領域 $\bar{\Omega}$ において p は自明解 $p = 0$ のみを有することがいえるため, 見かけの固有振動数問題の影響を回避した解が得られる.

3. 数 値 解 析

以下に解析解が得られる呼吸球の問題, および領域内に孤立した有界な領域を含む問題についてそれぞれ式 (6) (以下 OBIE) を適用して得られた結果, Burton-Miller 型の結合した境界積分方程式を全節点に適用して得られた結果およびソース点の位置により 2 つの境界積分方程式を使い分ける手法 (以下 Hybrid method) を適用して得られた結果についてそれぞれ示す. Hybrid method を適用する際の境界積分方程式は要素の頂点にソース点がある場合は式 (16) に結合係数を乗じた式を, 一方その他の点では結合した境界積分方程式を

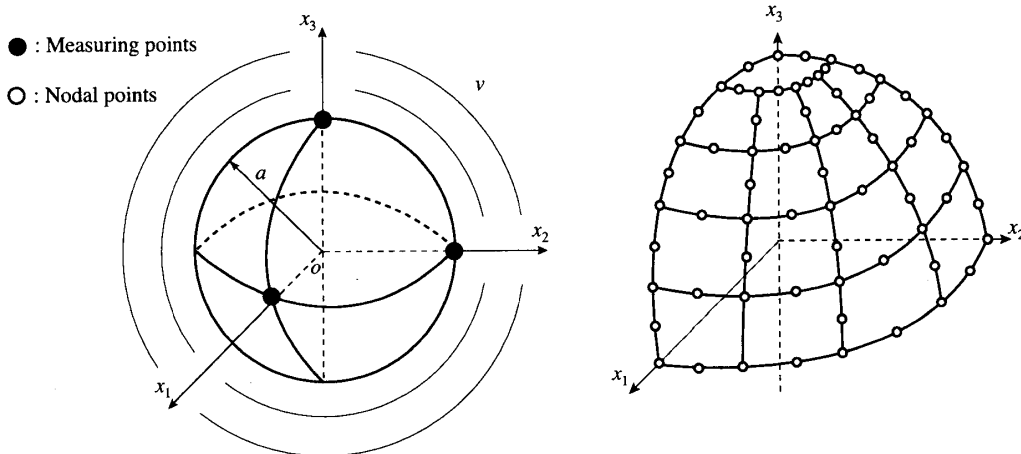


Fig. 3 Analysis model 1 and its boundary element discretization

適用するものとした。結合係数に関しては Cunefare - Koopmann⁽¹³⁾らに従って i/k とした。なお、特異積分はサブ要素分割⁽¹⁴⁾を行い評価している。サブ要素への分割は図2に示すように、ソース点が四角形2次要素の頂点に配置された場合は Type A に示すように2つのサブ要素に分割し、その他の点に配置されている場合は Type B に示すように3つのサブ要素に分割した。

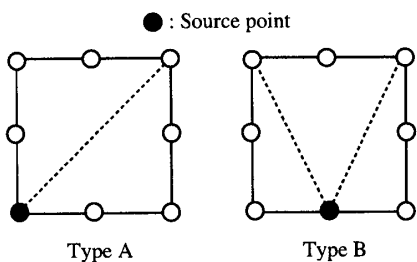


Fig. 2 Type of dividing for sub - element

3.1 例題解析 1 図3の左図に示すように、無限空間内に境界表面が一様な粒子速度 v で振動する呼吸球を考える。媒質密度 $\rho = 1.2$ [kg/m³]、伝播速度 $c = 340$ [m/s]、呼吸球の半径 $a = 0.2$ [m] とした。呼吸球の表面は $v = 1.0$ [m/s] の境界条件を与えた。要素分割は問題の対称性を考慮して、図3の右図に示すように1/8部分を四角形境界2次要素を用いて要素数18で離散化を行った。評価点は境界表面上に3点配置した。周波数は1 [Hz] ~ 2 [kHz] を1 [Hz] 刻みで解析を行った。数値結果として示すのはそれぞれの評価点で得られた音圧の絶対値の平均値を音圧レベルに変換したものと次式で与えられる解析解⁽¹⁵⁾を音圧レベルに変換した数値とを比較したものである。

$$p(r) = v \frac{i\omega\rho a^2}{(1+ika)r} \exp\{-ik(r-a)\} \quad (33)$$

図4にOBIEを適用して得られた数値結果、式(6)と(16)を線形結合した式を境界積分方程式として適用するBurton - Millerによる手法を適用して得られた結果およびソース点 y の位置により結合した境界積分方程式とその結合係数を式(16)に乗じた式を使い分けるHybrid methodを適用して得られた結果と解析解とを全波数域において比較した図を示す。

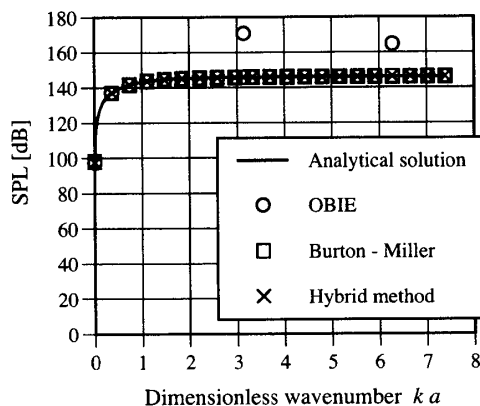


Fig. 4 Numerical results obtained by applying OBIE, Burton - Miller and Hybrid method

数値解析結果より、OBIEを適用して得られた数値結果が $ka = 3$ および $ka = 6$ 付近において見かけの固有振動数問題の影響で解の精度が低下していることがわかるが、Burton - Millerの手法およびHybrid methodはその影響を回避した解が得られていることがわかる。呼吸球の場合、この共振解は $ka = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) で現れることがわかっている⁽⁴⁾。そこで $ka = \pi$ および $ka = 2\pi$ 近傍付近で周波数の刻みを細かくして数値解析を行った。具体的に849 [Hz] ~ 851 [Hz] (波数 $ka = 3.1378 \sim 3.1453$) および1699.2 [Hz] ~ 1700.8 [kHz] (波数 $ka = 6.2802 \sim 6.2862$) のそれぞれの周波数域

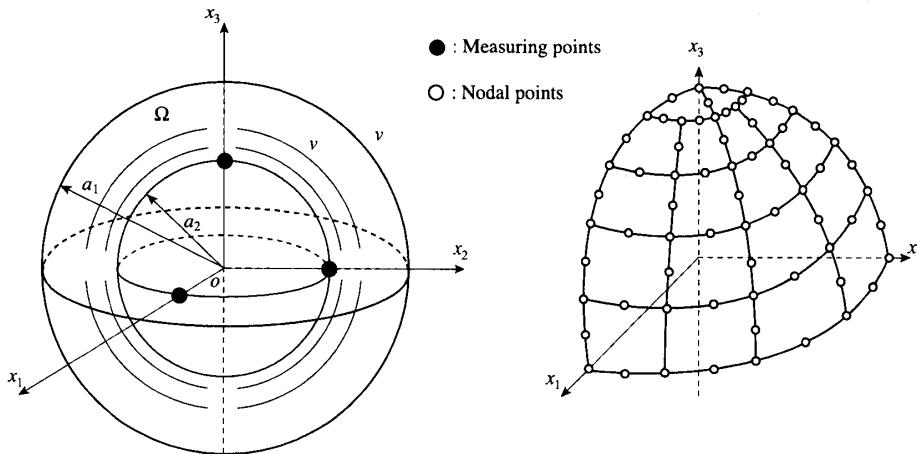


Fig. 7 Analysis model 2 and its boundary element discretization

を 0.1 [Hz] 刻みで数値解析を行った。図 5, 図 6 にそれぞれの波数域における数値結果を比較して示す。

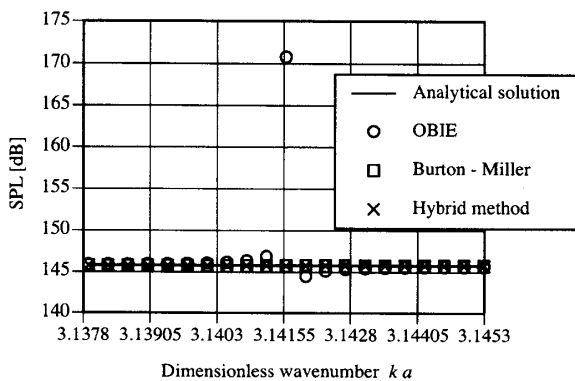
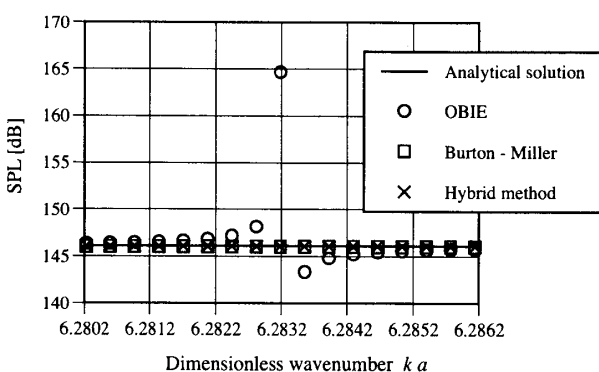
Fig. 5 Comparison of numerical results between $ka = 3.1378$ and 3.1453 Fig. 6 Comparison of numerical results between $ka = 6.2802$ and 6.2862

図 5, 図 6 より OBIE を適用した場合, それぞれ $ka = \pi$, $ka = 2\pi$ 付近で見かけの固有振動数問題の影響により解の精度が低下していることが確認できる

が, Burton - Miller の手法および Hybrid method はその影響を回避した精度の高い数値結果を得られていることがわかる。

3.2 例題解析 2 図 7 の左図に示すように半径 a_1 を有する剛体の球の内部に半径が a_2 で境界表面が一樣な粒子速度 v で振動している呼吸球が存在する問題を考える。考察領域 Ω は外側の球と内側の球に囲まれた領域とした。外側の球の半径 $a_1 = 0.25$ [m], 内側の球の半径 $a_2 = 0.1$ [m] とし, 媒質密度 $\rho = 1.2$ [kg/m³], 伝播速度 $c = 340$ [m/s] とした。境界条件は, 外側の球は $v = 0.0$ [m/s], 内側の呼吸球は $v = 1.0$ [m/s] の境界条件をそれぞれ与えた。要素分割は問題の対称性を考慮して, 図 7 の右図に示すように外側の球, および内側の呼吸球の 1/8 部分を四角形境界 2 次要素を用いてそれぞれ 18 要素で離散化を行った。評価点は内側の呼吸球の境界表面上に 3 点配置した。周波数は 1 [Hz] ~ 2 [kHz] を 1 [Hz] 刻みで解析を行った。数値結果として示すのはそれぞれの評価点で得られた音圧の絶対値の平均値を音圧レベルに変換したものである。

図 8 に OBIE を適用して得られた数値結果, Burton - Miller による手法を適用して得られた結果および Hybrid method を適用して得られた結果を解析した全波数域において比較した図を示す。この問題において見かけの固有振動数の影響は, 解析する振動数が内側の球の内部 Dirichlet 問題の固有振動数に一致した場合に生じる。その固有振動数は $ka_2 = n\pi (n = 1, 2, \dots)$ であるため, その振動数付近で OBIE による解析精度は低下していることがわかる。しかし, Burton - Miller の手法および Hybrid method はその影響を回避した解が得られていることがわかる。

図 9 に見かけの固有振動数問題の影響が発生する $ka_2 = \pi$ 付近において解析する周波数の刻みを細か

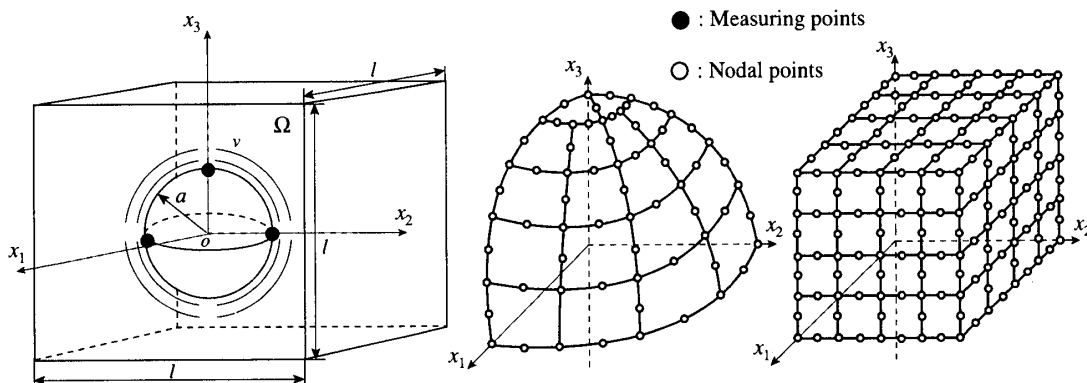


Fig. 10 Analysis model 3 and its boundary element discretization

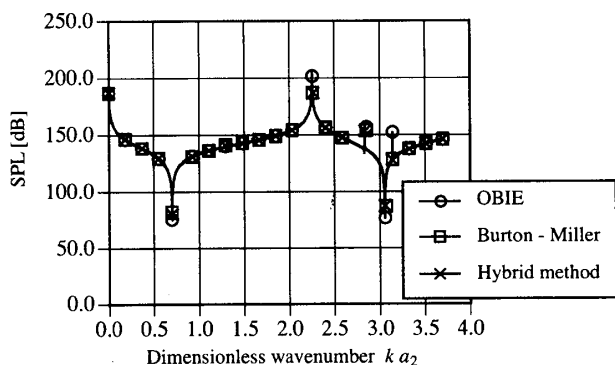


Fig. 8 Numerical results obtained by applying OBIE, Burton - Miller and Hybrid method

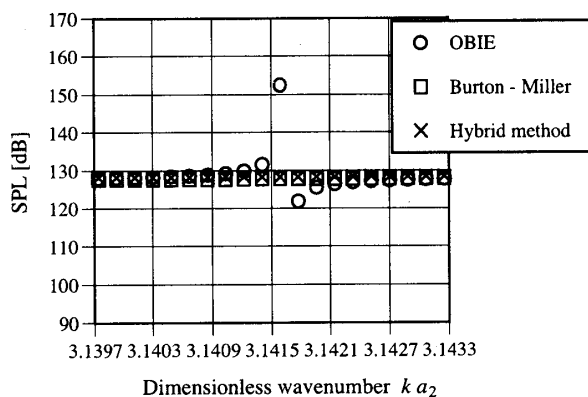


Fig. 9 Comparison of numerical results between $ka_2 = 3.1397$ and 3.1433

くして数値解析を行い、得られたそれぞれの結果を比較して示す。周波数は $1699 \text{ [Hz]} \sim 1700.9 \text{ [Hz]}$ (波数 $ka_2 = 3.1397 \sim 3.1433$) を 0.1 [Hz] 刻みで解析を行った。数値解析結果より OBIE を適用した場合、解の精度は低下しているが、Burton - Miller の手法および Hybrid method はこの問題の影響を回避した数値解を得られていることがわかる。

3.3 例題解析 3 図 10 の左図に示すように一辺の長さが l である立方体の内部に半径が a で境界表面が一様な粒子速度 v で振動している呼吸球が存在する問題を考える。考察領域 Ω は立方体とその中の球に囲まれた領域とした。立方体の一辺の長さ $l = 0.5 \text{ [m]}$ 、内側の球の半径 $a = 0.1 \text{ [m]}$ とし、媒質密度 $\rho = 1.2 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 、伝播速度 $c = 340 \text{ [m/s]}$ とした。境界条件は、外側の立方体の境界表面を $v = 0.0 \text{ [m/s]}$ 、内側の呼吸球を $v = 1.0 \text{ [m/s]}$ の境界条件をそれぞれ与えた。要素分割は問題の対称性を考慮して、内側の呼吸球表面を四角形境界 2 次要素を用いて 18 要素で離散化を行った。一方、立方体の表面は四角形境界 2 次要素を用いて一つの面を 16 要素、合計 48 要素で離散化した。その際、角点を含む要素は非適合要素を採用した。評価点は内側の呼吸球の境界表面上に 3 点配置した。周波数は $1 \text{ [Hz]} \sim 2 \text{ [kHz]}$ を 1 [Hz] 刻みで解析を行った。数値結果として示すのはそれぞれの評価点で得られた音圧の絶対値の平均値を音圧レベルに変換したものである。

図 11 に OBIE を適用して得られた数値結果、Burton - Miller による手法を適用して得られた結果および Hybrid method を適用して得られた結果を解析した全波数域において比較した図を示す。図 12 に見かけの固有振動数問題の影響が発生する $ka = \pi$ 付近において解析する周波数の刻みを細かくして数値解析をして得られたそれぞれの結果を比較して示す。周波数は $1699 \text{ [Hz]} \sim 1700.9 \text{ [Hz]}$ (波数 $ka = 3.1397 \sim 3.1433$) を 0.1 [Hz] 刻みで解析を行った。数値解析結果より OBIE を適用した場合解の精度は低下しているが、Burton - Miller の手法および提案手法はこの問題の影響を回避した数値解を得られていることがわかる。

表 1 にそれぞれの問題に対する各手法の計算時間を示す。計算にはパーソナルコンピュータ DELL PRECISION 380 を用いた。表 1 より、本手法の方が

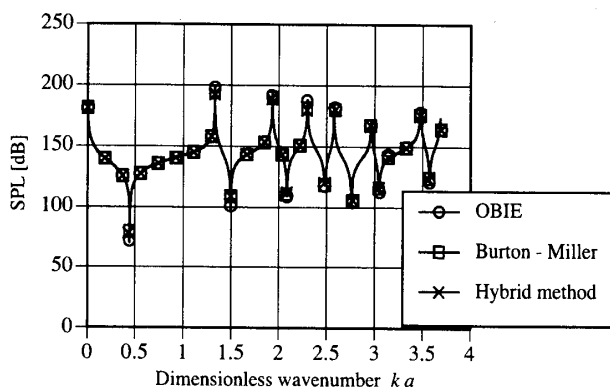


Fig. 11 Numerical results obtained by applying OBIE, Burton - Miller and Hybrid method

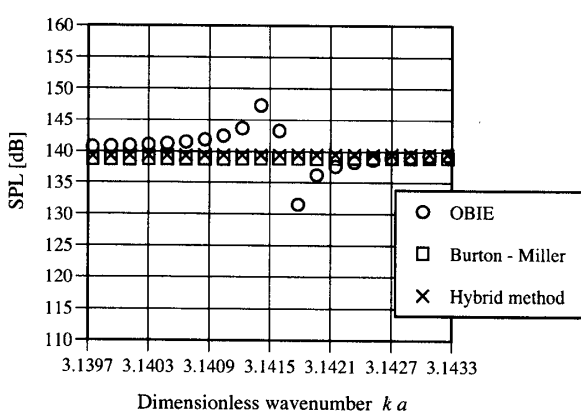


Fig. 12 Comparison of numerical results between $ka = 3.1397$ and 3.1433

計算時間が短く、要素数が増加するにつれて本手法の方が計算時間がより短くなることわかる。従って本手法は、例えば多くの要素を必要とする高次の周波数域の問題、反復計算ごとに音場の順解析を行うような問題に対して有用であると考えられる。

Table 1 Comparison of CPU TIME (sec)

	Hybrid method	Burton - Miller	Elements
Model 1	6.027	6.385	18
Model 2	9.192	9.968	36
Model 3	16.140	17.438	66

4. 結 論

境界要素法を用いて Helmholtz 方程式に支配される 3次元定常音響問題を解析する際に現れる見かけの固有振動数問題を回避する新しい手法を提案した。提案手法に基づいた数値プログラムを開発し、解析解が得られる呼吸球の問題および2種類の内部問題について、全節点において結合型の境界積分方程式を適用した場合の数値結果と比較することで本手法の3次元問題への有効性を確認した。

今後は、音場の解析に本手法を適用した最適化問題について検討する予定である。

文 献

- (1) Tanaka, M. et al., *Boundary Element Method* (in Japanese), (1991), Baifukan.
- (2) Kobayashi, S. et al., *Wave Analysis and Boundary Element Method* (in Japanese), (2000), Kyoto University Press Online.
- (3) Chen, I. A. et al., Analytical Study and Numerical Experiments for Radiation and Scattering Problems Using The CHIEF Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.248, (2001), pp.809-828.
- (4) Schenck, H. A., Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.44, No.1, (1968), pp.41-58.
- (5) Burton, A. J. and Miller, G. F., The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems, *Journal of Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol.323, (1971), pp.201-210.
- (6) Bord, K., On the Uniqueness of Solution for All Wavenumbers in Acoustic Radiation, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.76, No.4, (1984), pp.1238-1443.
- (7) Banerjee, P. K. and Shaw, R. P. (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, 2, (1982), Chapt.7, pp.177-210, Applied Science Publishers.
- (8) Tanaka, M. et al., A Boundary Element Analysis for Avoiding the Fictitious Eigenfrequency Problem in Acoustic Field (2nd Report : Revised Version), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.72, No.719, (2006), in print.
- (9) Acoustical Society of Japan (ed.), *Basic Acoustical Engineering* (in Japanese), (1990), Corona Publishing Co.,Ltd.
- (10) Matsumoto, T. and Tanaka, M., An Alternative Discretization Technique for Regularized Boundary Integral Equation, *Transactions of the JASCOME, Journal of BEM technology conference*, Vol.1, (1991), pp.7-12.
- (11) Arai, M. et al., Highly Accurate Analysis by Boundary Element Method Based on Uniform Gradient Condition (Application for Formulation of Classical Potential Problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.61, No.581, (1995), pp.161-168.
- (12) Matsumoto, T. et al., Evaluation of the Hypersingular and Regularized Boundary Integral Equations for the Boundary Potential Gradients in 2D Field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.64, No.619, (1998), pp.743-750.
- (13) Cunefare, K. A. and Koopmann, G., A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.85, No.1, (1989), pp.39-48.
- (14) Yuuki, R. and Kisu, H., *Boundary Element Method for Elastic Analysis* (in Japanese), (1987), Baifukan.
- (15) Itô, T., *Acoustic Engineering* (in Japanese), (1977), Denkishoin Co.,Ltd.