邊界元素法在拉普拉斯方程反算問題之應用

報告者：林盛益　先生
指導教授：陳正宗　教授
日期：2002/12/20
地點：虎尾技術學院

大綱

- 反算問題
- 正規化方法(**TSVD＋ L curve**)
- 數值結果
- 結論

- 反算問題
- 正規化方法(**TSVD＋ L curve**)
- 數值結果
- 結論

工程問題之正算與反算模式

- 學者阿達馬(Hadamard)對於定義良態模式有以下之看法，良態模式必滿足下列三個條件：

  1.解的存在性。

  2.解的唯一性。

  3.解的連續性。

若不滿足上列之條件，則會有病態模式之產生

反算問題之種類

- 缺少控制方程之反算問題(電路系統之辨識問題)
- 缺少內力源資訊之反算問題(地盤反算之問題，地震波之傳遞情形)
- 缺少材料特性之反算問題(開挖工程之土壤性質推求)
- 缺少領域之反算問題(設計最佳機翼形狀)。

反算問題之種類

- 缺少邊界條件之反算問題(給過定邊界條件)。

1.隧道開挖時，開挖面的位移及曳引力均可量測，然而前進端的資訊則一無所知

2.如鍋爐之熱傳情形，溫度分布之情況，在可量測端，溫度與溫度梯度可掌握，另一端則全不知。

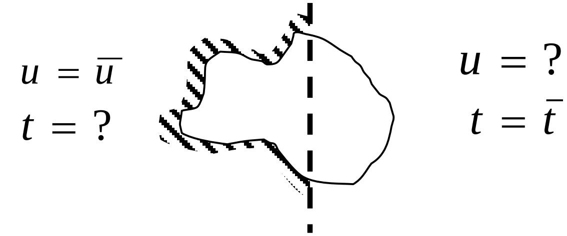
3.人體血液之流動情形的量測。

4.鋼筋混凝土之拉拔試驗，應力應變之情形。

給過定邊界條件之反算問題

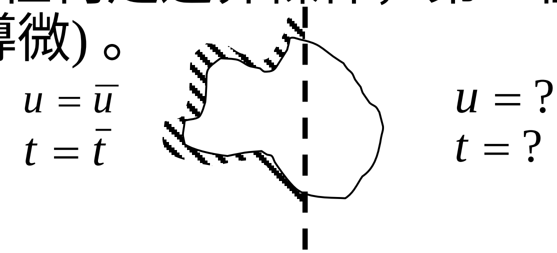
正算問題：

在已知的邊界上任何一部分之邊界條件 (含勢位與勢位導微)，兩者之一必有一個為已知條件。



反算問題：

給過定邊界條件之反算問題。這種問題是在已知的邊界上分有兩種邊界形式，第一種邊界是完全沒有任何之邊界條件，第二種邊界是給過定之邊界條件(含勢位與勢位導微) 。



矩陣操作 $[U]\{\tilde{t}\}=[T]\{\tilde{u}\}$

正算問題

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ \bar{t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_T & -A_U \\ D_T & -C_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_U & -A_T \\ D_U & -C_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

反算問題

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{t} \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

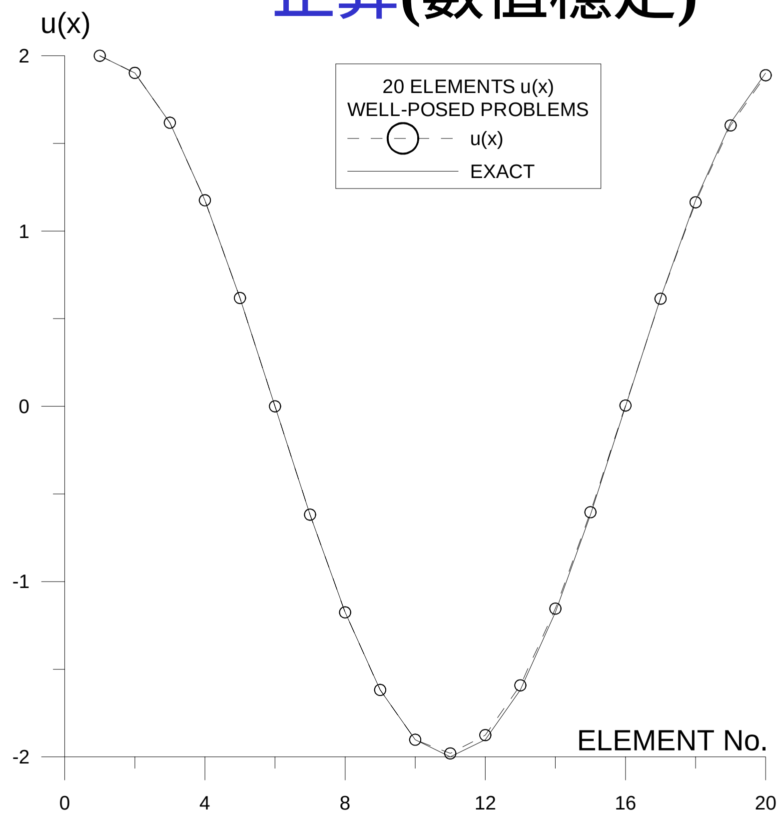
$$\begin{bmatrix} B_U & -B_T \\ D_U & -D_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_T & -A_U \\ C_T & -C_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$$

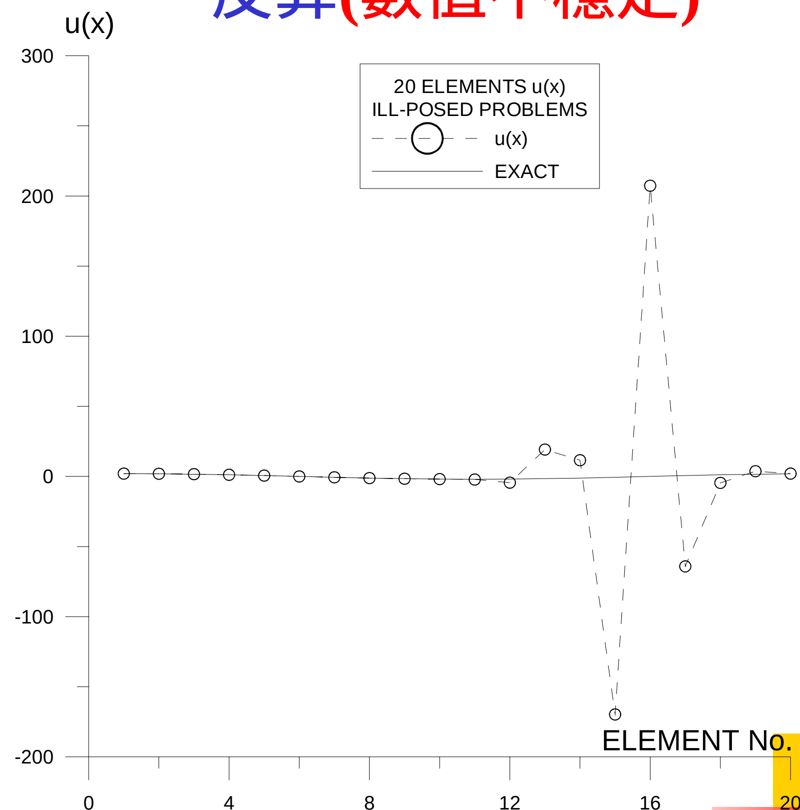
- 化簡為 $[A]\{x\}=\{b\}$

★反算問題會造成矩陣病態行為，正算則無此情形

正算及反算問題

正算(數值穩定) 反算(數值不穩定)





正規化技巧

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

以一近似的良態矩陣 A' 來取代原系統的 A 矩陣，來求得近似之合理解

$$A'\tilde{x} = \tilde{b}$$

- 反算問題
- 正規化方法(TSVD＋ L curve)
- 數值結果
- 結論

奇異值分解法

- singular value decomposition

$$[A]_{m\times n} = [\Phi]_{m\times m}[\Sigma]_{m\times n}[\Psi]^{T}{}_{n\times n}$$

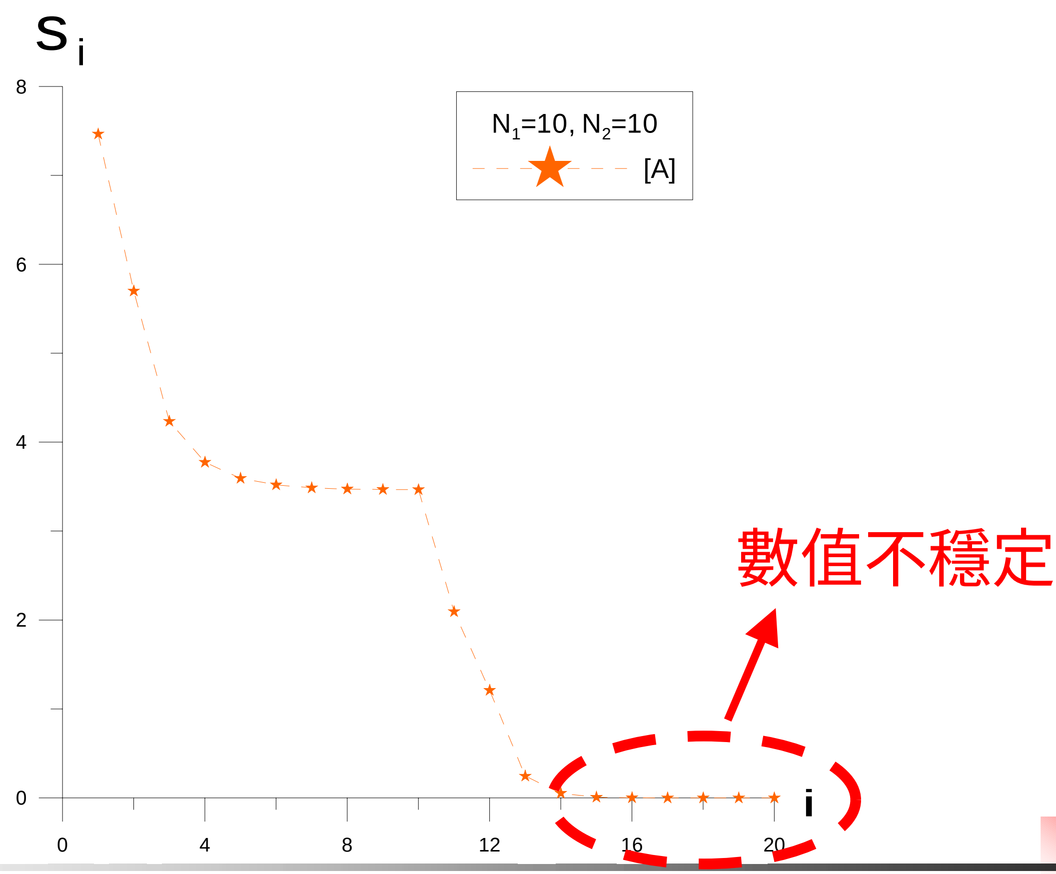
- 對角矩陣

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

- 龠矩陣

$$[\Phi]_{m\times m} \qquad [\Psi]_{n\times n}$$

病態矩陣



奇異值分解法

- 原系統

$$A = \Phi\Sigma\Psi^T = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sigma_i {\psi_i}^T$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{{\phi_i}^T \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i$$

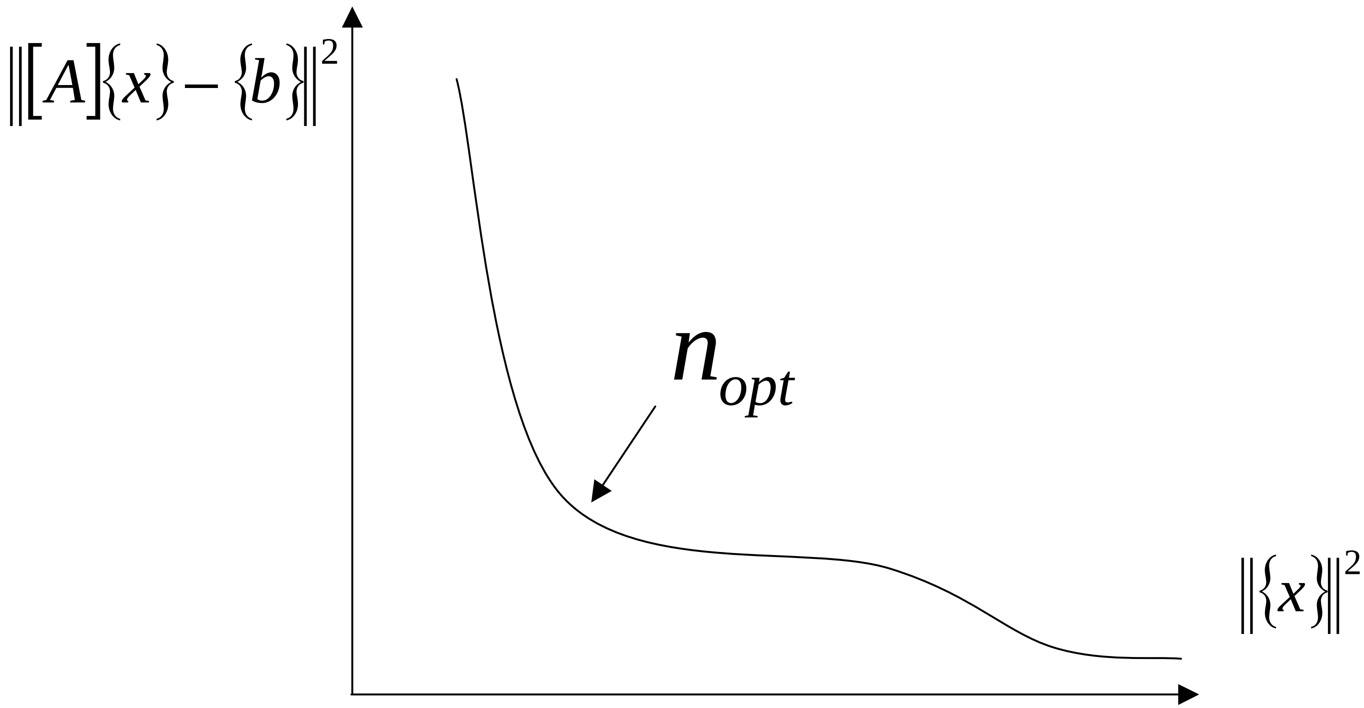
- 正規化系統

$$A' = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \sigma_i {\psi_i}^T, \ n \le N$$

$$\tilde{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{{\phi_i}^T \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i, \ n \le N$$

L曲線

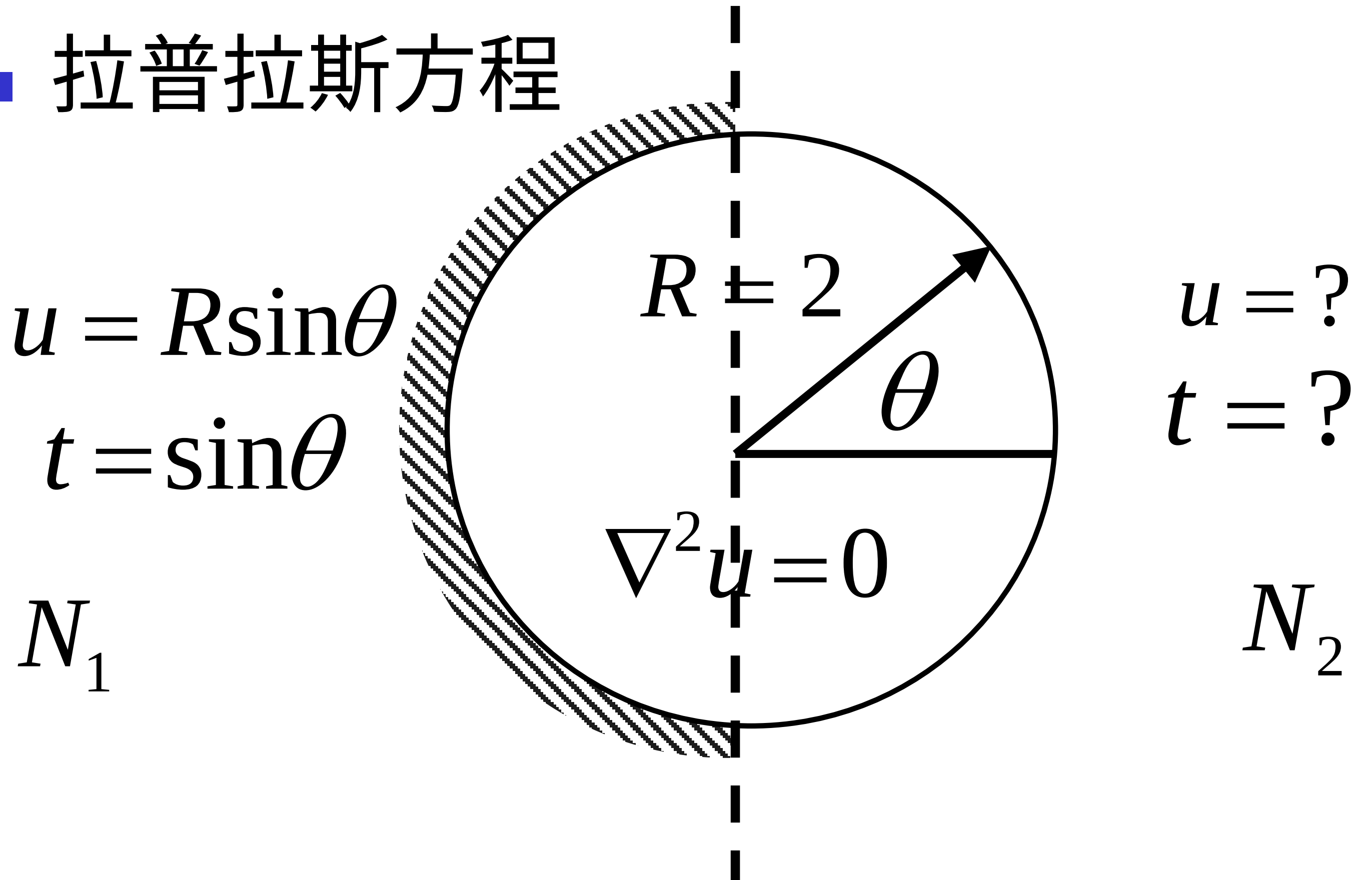
- 滿足 $\min\left\|\tilde{x}^{(n)}\right\|^2$ 及 $\left\|A\tilde{x}^{(n)}-\tilde{b}\right\|\le\varepsilon$



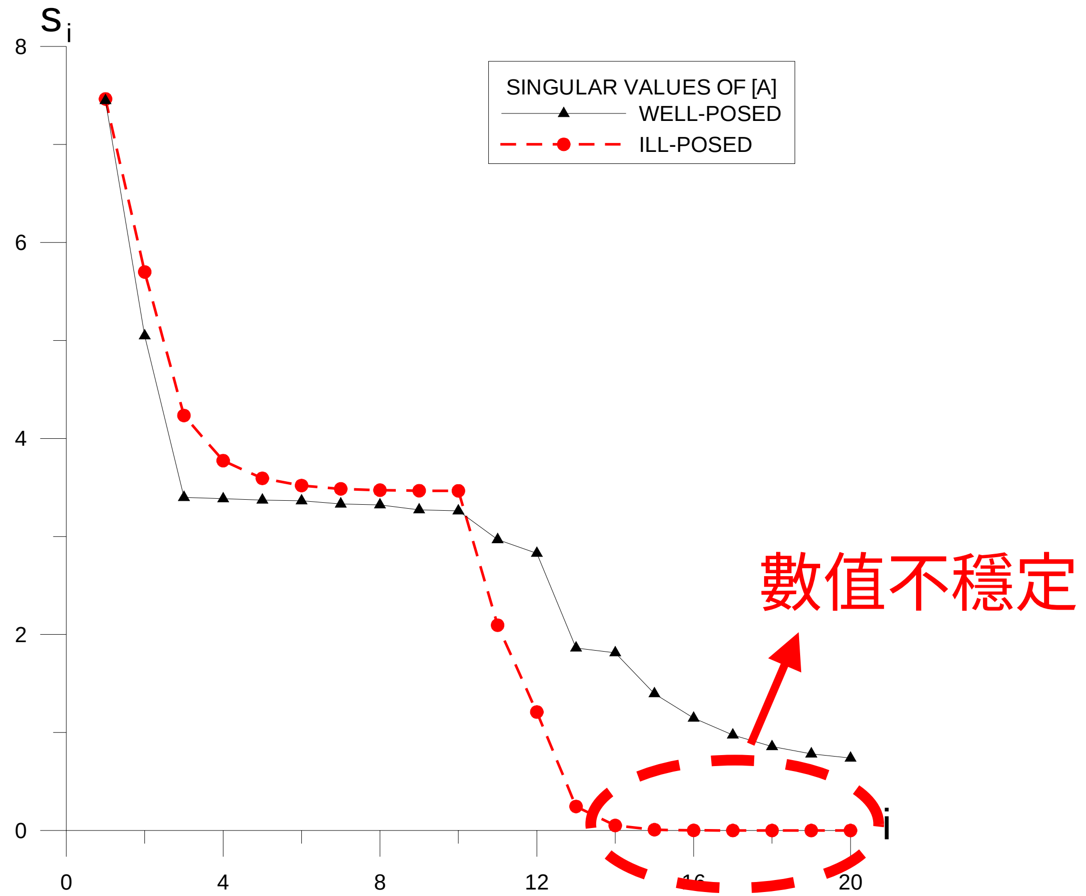
- 反算問題
- 正規化方法(**TSVD＋ L curve**)
- 數值結果
- 結論

反算問題

- 拉普拉斯方程

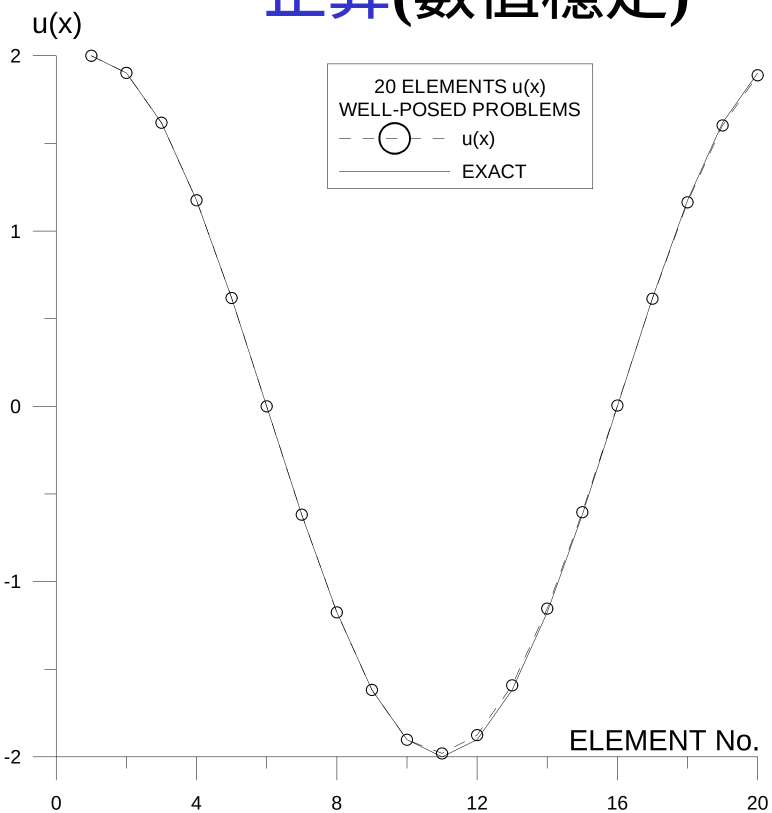


奇異值(N_1=10,N_2=10)

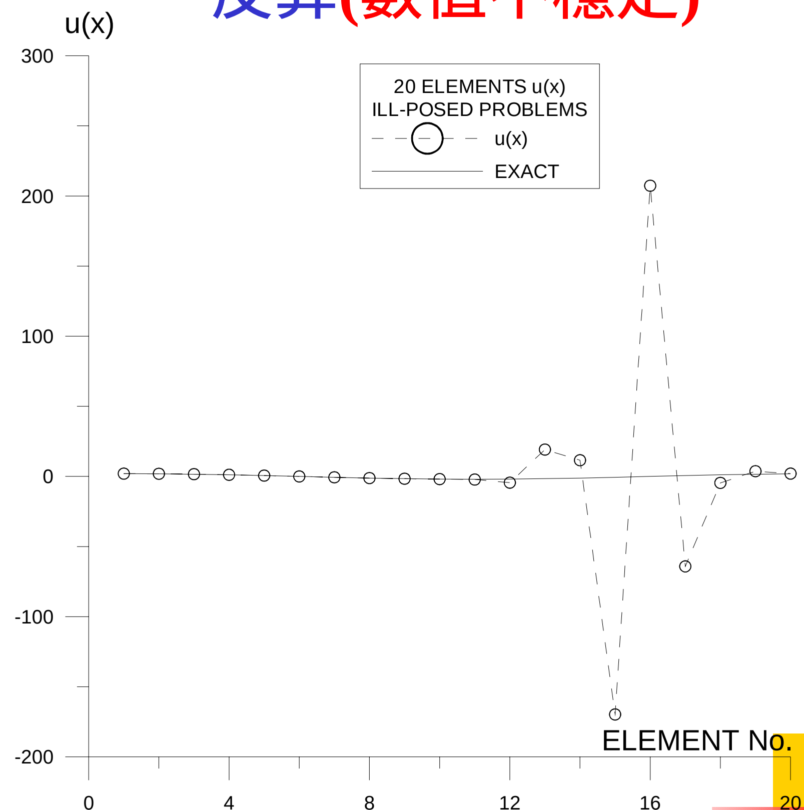


正算及反算問題

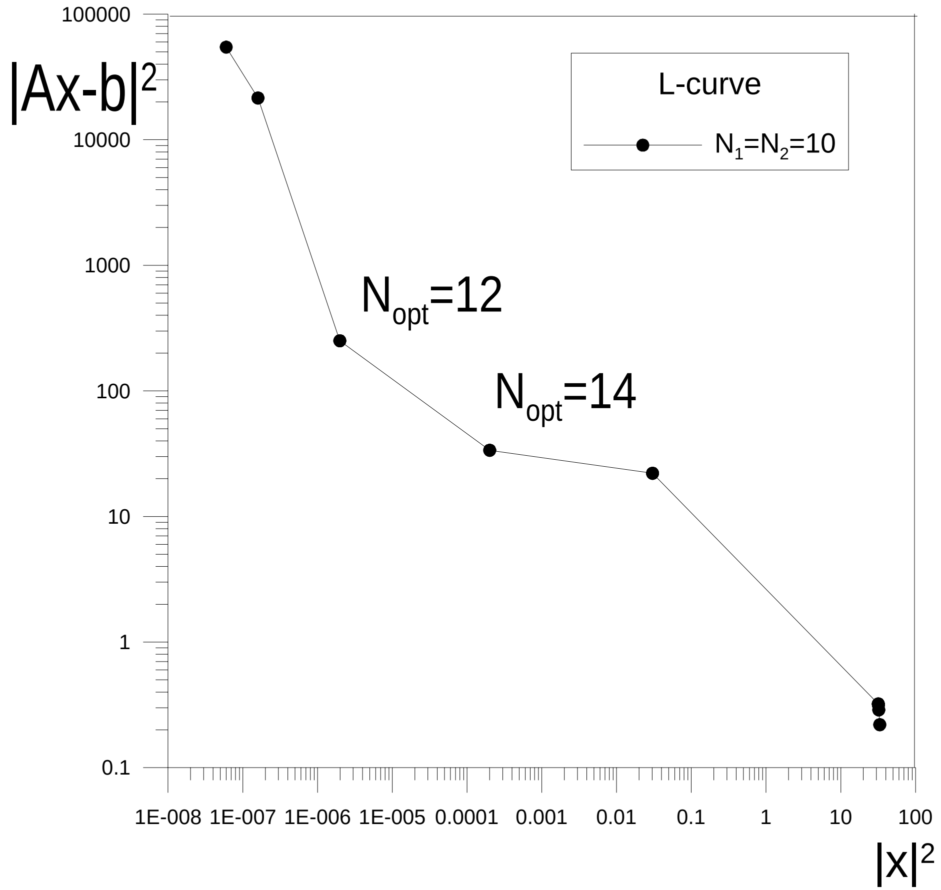
正算(數值穩定)



反算(數值不穩定)

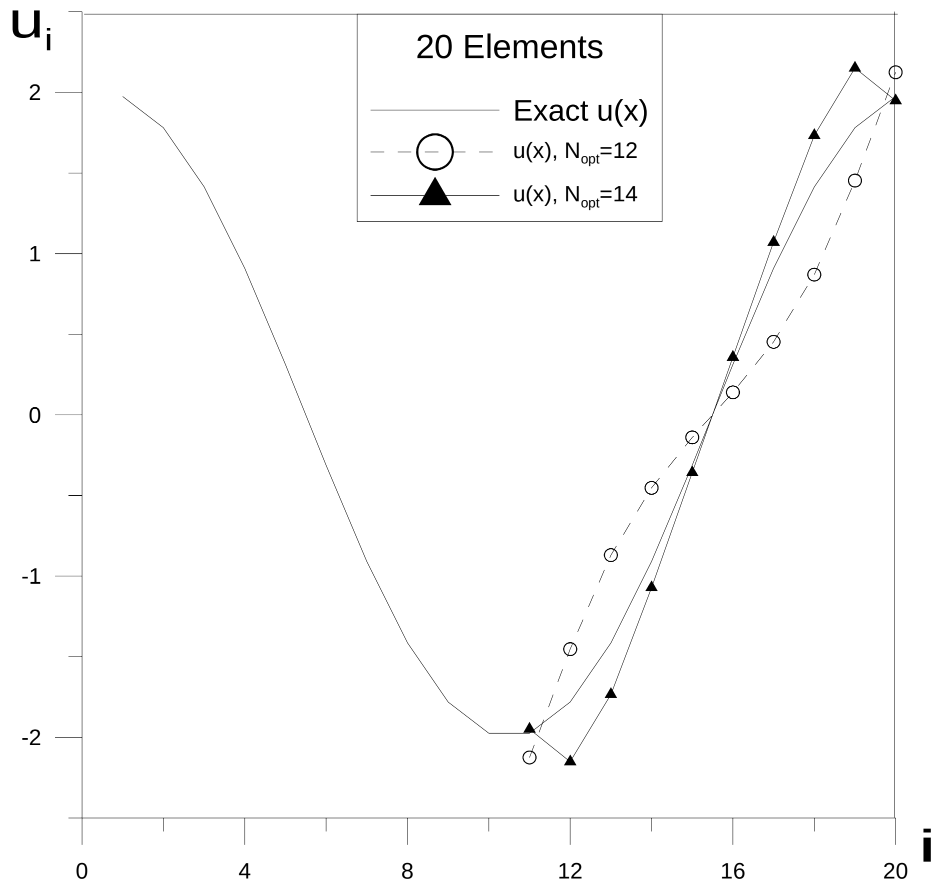


L曲線



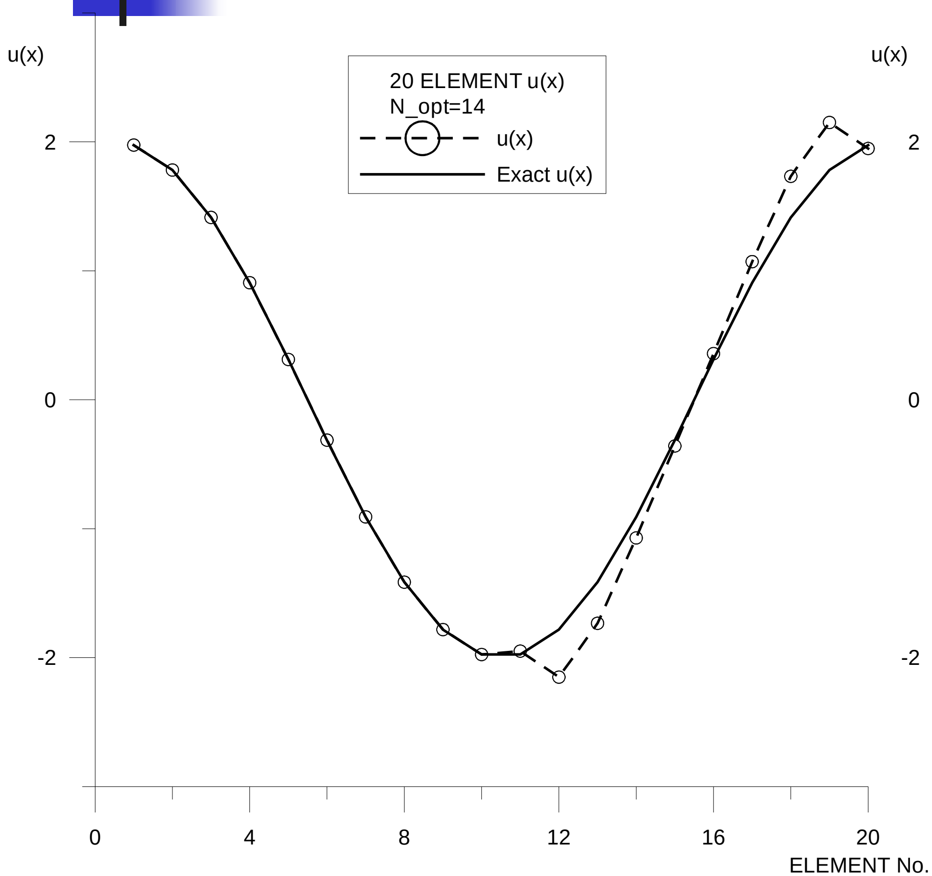
100000
10000
1000
100
10
1
0.1
$|Ax-b|^2$
L-curve
$N_1=N_2=10$
$N_{opt}=12$
$N_{opt}=14$
1E-008 1E-007 1E-006 1E-005 0.0001 0.001 0.01 0.1 1 10 100
$|x|^2$

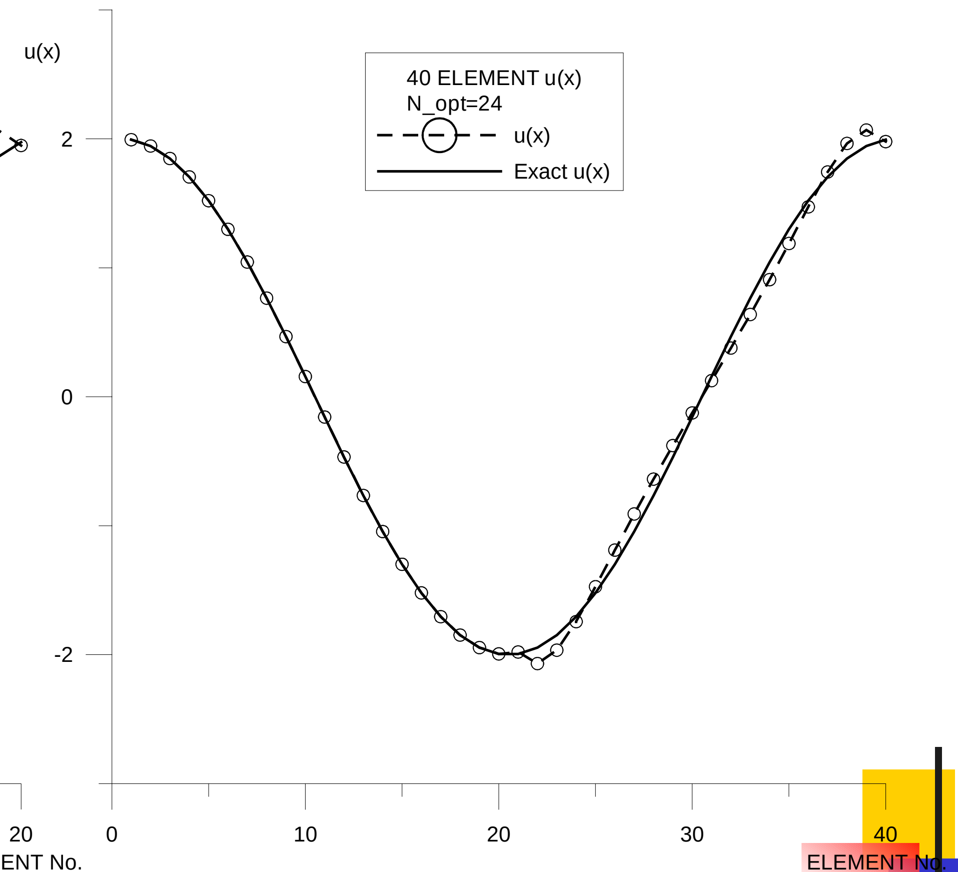
不同N_{opt}之比較



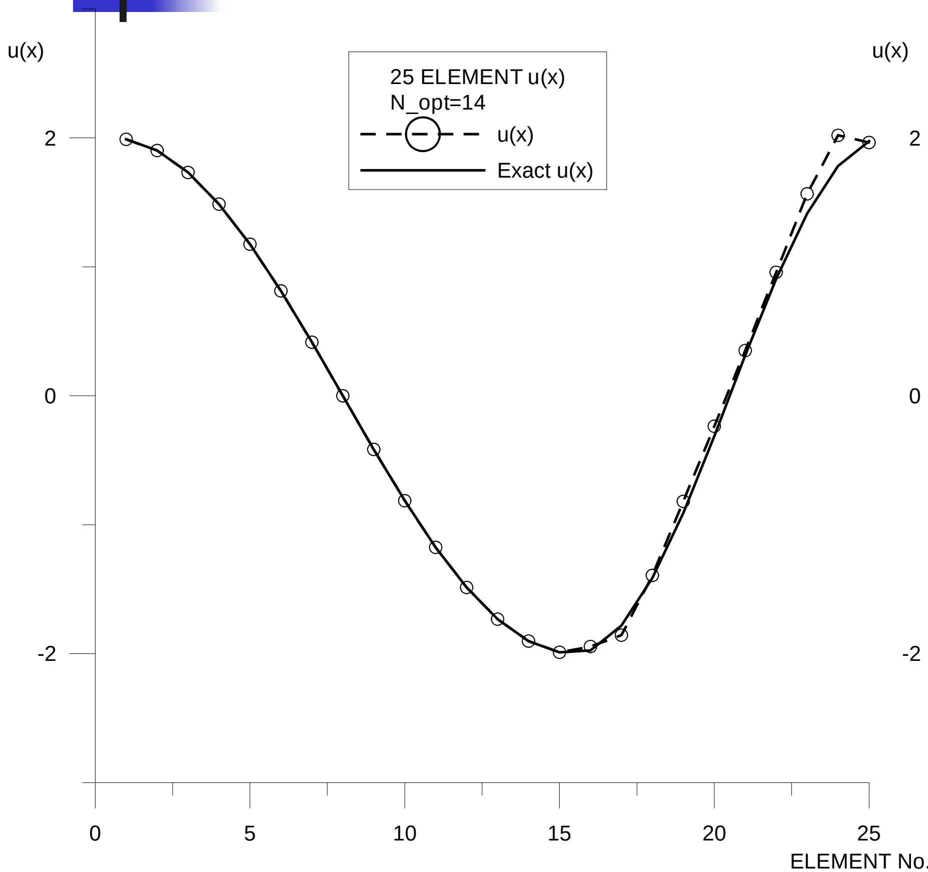
u_i
2
1
0
-1
-2
20 Elements
Exact u(x)
u(x), N_{opt}=12
u(x), N_{opt}=14
0
4
8
12
16
20
i

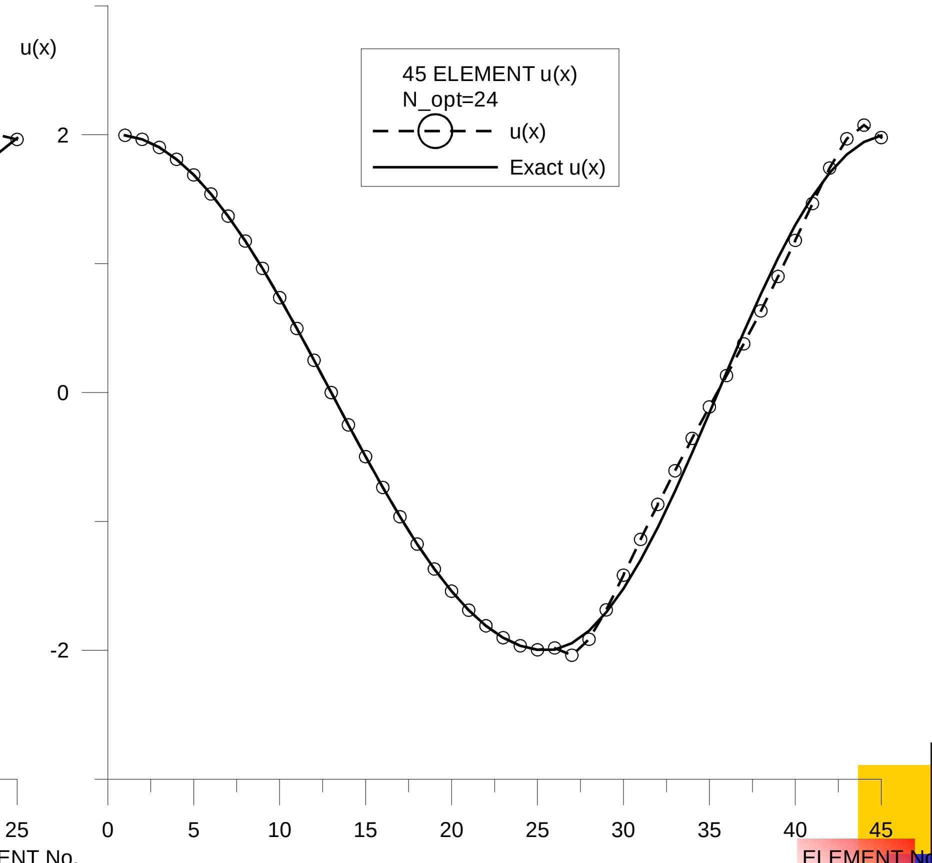
不同元素個數之結果(均勻分佈)





不同元素個數之結果(不均勻分佈)





- 反算問題
- 正規化方法(**TSVD＋ L curve**)
- 數值結果
- 結論

結論

- 成功使用「邊界元素法」並採用「奇異值分解法」與「L-曲線」的方法及觀念來克服反算問題之病態行為，得到合理之結果。

- 使用邊界元素法時求解反算問題時，在邊界所分佈的元素數目（N_1=N_2）增多時，可獲得較佳之逼近的合理解。

- 若在給定足夠之已知邊界條件下，已知邊界條件之分佈元素個數（N_1）增多時，亦可獲得較佳之逼近的合理解。

報告完畢
請多指教