

地盤反應逆向運算—病態問題

陳正宗 陳桂鴻

海洋大學河海工程學研究所

摘 要

大地工程師在做地盤反應逆向運算時，由於不熟悉反算問題的本質，經常求得不合理的結果，所以在本文中我們將釐清正算及反算問題的本質，藉此知道工程上逆向運算為何常屬於病態問題。處理這種問題我們捨棄工程常用的切除頻率法（如 SHAKE 程式的 cutoff frequency），該法係在頻率域上加矩形視窗，而改以再生核 (reproducing kernel) 的加權視窗（Cesaro 視窗或 $e^{-\alpha k^2}$ 高斯視窗）觀念，將原本會發散之病態問題的解加以正規化，因而求出合理的解，並應用 L 曲線的觀念來決定最佳視窗之正規化參數。最後我們將以剪力梁波傳方程（地盤逆向運算）及拉普拉斯方程式兩種給過定邊界條件的兩個算例來驗證本文方法的可行性。

一、前言

在做地盤反應分析時，常常僅可量測到自由地表曳引力的地表的位移記錄，卻欲求地底下基盤的運動行為，另如隧道開挖時，亦僅得到某一開挖面的訊息（含變形與應力），而卻欲求另一端的位移或應力資料，此類問題，以數學語言而言，係一給過定邊界條件模式。以物理觀念而言，可稱作半盲問題。此類問題的數學模式均屬逆向運算即反算問題，都具有病態特性。正算問題的解空間性質，文獻上均曾被廣泛討論過，所以處理此種問題通常並不會求到發散的解，但反算問題之解空間，因為往往不好掌握，所以常得到發散的解。以數學定義而言，後者會因已知資料的些許誤差而造成解的偏離與不穩定，而前者不然。過往一些學者雖已發表一些地盤逆向運算之文章 [4,5]，但由於對工程問題的數學運算模式並沒有充分了解，往往誤解了反算問題的本質，而對發散

結果發生的原因說明得不清楚，更遑論解決之道。在目前的工程應用程式中，如有限元素法的 NASTRAN 程式 [2]，ABAQUS 程式，邊界元素法的 BEASY 程式 [3] 等，均僅有正算功能。反算問題方面之研究，由於起步較晚，最近才漸漸在學術界與工業界受到廣泛的重視 [6]，如地盤反應分析的 SHAKE 程式即有反卷積的反算功能。為了克服此反算問題所造成不合理的結果，SHAKE 程式提供了切除頻率的視窗觀念，但切除頻率要取多大頻率 Hz 則專家學者所見不同。如國內林晉祥博士 [5] 提及高聰忠博士曾建議 $10 \sim 20 Hz$ ，國外 Silva [14] 曾建議 $15 Hz$ ，唯各方說法莫衷一是，再者由過往文獻中可知所用的矩形視窗之最邊端的側漏現象是很大。由於以上作法並不嚴謹，且需豐富經驗及工程判斷與技巧，每個學者的說法也不一致，經驗不足的使用者經常會對於切除多大的頻率產生困擾。為了將反算問題的解空間掌握的比較好，並加以改善，葉為忠博士曾

在 1991 年探討彈性力學中給過定邊界條件的反算問題 [9]，作者亦曾在 1995 年針對地盤反算問題 [8]，提出正規化技巧，克服了發散問題，另對給過定邊界條件之帶狀無限域拉普拉斯方程式 [12] 的反算問題亦曾研究過。綜整上述之經驗，我們瞭解到反算問題常可被視為一種病態問題 (ill-posed problem)；而正算問題視為一種良態問題 (well-posed problem)。

本文作者根據在反算問題數學模式的研究瞭解與經驗，除了將說明產生發散的原因外，亦提供加權視窗觀念來降低解對雜訊干擾的敏感度，如 Cesaro 視窗和高斯視窗的兩個方法，來重新分配高頻或高波數內含的振幅，經由此正規化技巧可將病態問題變成良態問題。並應用 L 曲線的觀念來決定最佳視窗的參數，藉此得到最合理的結果。現在我們將針對給過定邊界條件之各類反算問題的機制做一個完整的探討，可參照表一。

二、數學模式推導 — 傅立葉轉換

以下各小節我們將使用傅立葉轉換來推導

地盤反應的正算與反算問題的波傳問題、熱傳問題與給過定邊界條件之無限域拉普拉斯方程式，分述如下：

2.1 地盤反應分析

考慮如圖一與表一之土壤動力系統，單層土層之厚度為 H_s ，其地表及地底基盤分別以 $y = 0$ 和 $y = H_s$ 描述之，並假設土層屬於單層線彈性遲滯阻尼系統，地震波是以 SH 的剪力波之型式垂直於地表往上传遞能量。

2.1.1 正向運算

若基盤位移 ($u_b(t)$) 及自由地表曳引力 ($T_g(t) = 0$) 皆已知的情況下，而欲推求地表位移 ($u_g(t)$) 時，此即為典型的地盤反應正算程序。將剪力梁波傳方程作傅立葉轉換後 [8]，由運算結果可知在頻率域下輸入 (U_b) 與輸出 (U_g) 間的傳遞函數可表為下式

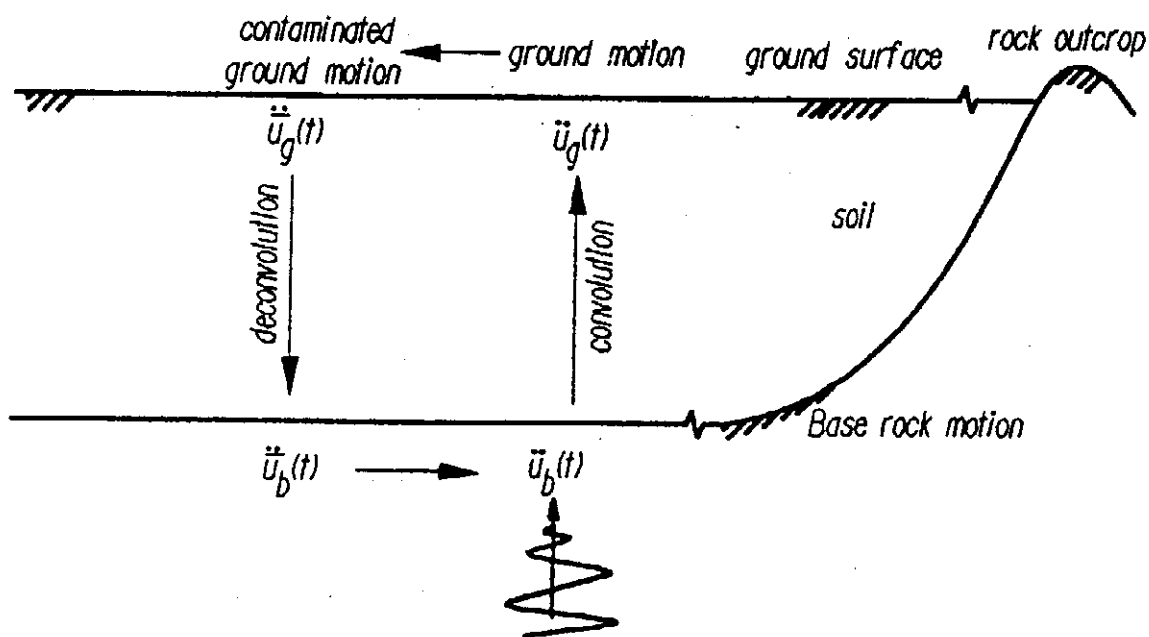
$$T_{gb}(f) = \frac{-U_g(f)}{U_b(f)} \quad (1)$$

其中 $T_{gb}(f)$ 稱作此土層的正向運算的傳遞函數， $U_g(f)$ 及 $U_b(f)$ 分別表示地表位移與基盤位移之時間訊號的傅立葉轉換。若系統參數皆已知時，則傳遞函數 $T_{gb}(f)$ 可以下式表示之

$$T_{gb}(f) = \frac{1}{\text{Cos}(K_s^* H_s)} \quad (2)$$

表一 波傳、熱傳及拉普拉斯方程式之間的比較

	Wave equation (soil dynamics)	Laplace equation	Heat conduction
G.E. (original domain)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$
Fourier domain	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{w^2}{c^2} U = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 U = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - iwU = 0$
Boundary condition	$u(0, t) = a(t)$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$u(x, 0) = \phi(x)$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$	$u(0, t) = a(t)$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$
Transfer funtion (direct problem)	$H(\omega) = \frac{1}{\text{cos}\left(\frac{\omega l}{c\sqrt{1+2\xi i}}\right)}$	$H(k) = \frac{1}{\text{cos } h(kl)}$	$H(\omega) = \frac{1}{\text{cos } h\left(\frac{\sqrt{\omega i l}}{\alpha}\right)}$
Transfer funtion (inuerse problem)	$H(\omega) = \text{cos}\left(\frac{\omega l}{c\sqrt{1+2\xi i}}\right)$	$H(k) = \text{cos } h(kl)$	$H(\omega) = \text{cos } h\left(\frac{\sqrt{\omega i l}}{\alpha}\right)$
Order of infinity	$\frac{1}{2} e^{\frac{l\xi}{c} w}$	$\frac{1}{2} e^{kl}$	$\frac{\sqrt{\omega}}{e^{\sqrt{2}\alpha l}}$
Index of ill-posedness	$\frac{l\xi}{c} w$	kl	$\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}\alpha} l$



圖一 單層土壤動力系統模式

其中 K_s^* 為複數波數且可表為下式

$$K_s^* = \frac{2\pi f}{V_s} (1 + 2i\xi_s)^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

式中 V_s 是土層的剪力波數， ξ_s 是土層的遲滯阻尼比， f 是激發頻率。由公式(1)到(3)可知若土層性質已知時，則傳遞函數 $T_{g_b}(f)$ 可決定，並且若 $U_b(f)$ 已量測出，則 $U_g(f)$ 可由公式(1)計算出來。這程序稱作正向運算程序 (convolution process)。

2.1.2 逆向運算

若量測資料為地表位移資料 $u_g(t)$ ，而欲求地底下岩盤位移 $u_b(t)$ ，則由運算結果可得下式

$$T_{b_g}(f) = \frac{U_b(f)}{U_g(f)} \quad (4)$$

其中 $T_{b_g}(f)$ 稱作此土層的逆向運算的傳遞函數。若系統參數皆已知時，則傳遞函數 $T_{b_g}(f)$ 可以下式表示之

$$T_{b_g}(f) = \text{Cos}(K_s^* H_s) \quad (5)$$

由以上二式可求得基盤位移 ($U_b(f)$)，若取傅立葉反轉換並離散化，則解可表為下式

$$u_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_b(f_n) e^{i2\pi f_n t} \quad (6)$$

其中 f_n 為第 n 個頻率。在實際工程計算中，均取有限個長度來分析，可以下式表示之

$$u_b(t) = \sum_{n=-N}^N U_b(f_n) e^{i2\pi f_n t} \quad (7)$$

由公式(4)到(6)可知若 $U_g(f)$ 已量測出，則 $U_b(f)$ 可計算出來。這程序稱作逆向運算程序 (deconvolution process)。比較公式(2)和(5)，可知 $T_{b_g}(f)$ 與 $T_{g_b}(f)$ 互為倒數，並將它們繪於圖二(b)。為了對反算問題的本質進一步的瞭解，本文亦考慮熱傳方程與拉普拉斯方程如下：

2.2 熱傳導

考慮如圖三與表一所示的熱傳系統，其帶狀區域間的厚度為 l ，上下表面分別以 $y = 0$ 和 $y = l$ 描述之，並假設上表面熱通量為零 (flux free)。

2.2.1 正向運算

若下表面的溫度 ($u_2(t)$) 已量得，而欲推求上表面溫度 ($u_1(t)$) 時，經對熱傳方程式做傅立葉轉換後，可得下式

$$T_{12}(f) = \frac{U_1(f)}{U_2(f)} \quad (8)$$

其中 $T_{12}(f)$ 稱作此系統的正向運算的傳遞函數， $U_1(f)$ 及 $U_2(f)$ 分別表示上表面溫度與下表面溫度之時間訊號的傅立葉轉換。若系統參數皆已知時，則傳遞函數 $T_{12}(f)$ 可以下式表示

$$T_{12}(f) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{fi}}{k}l\right)} \quad (9)$$

上式中 i 為虛數， k 為此系統的熱傳導係數。若系統性質已知時，則可求得正算問題的傳遞函數 $T_{12}(f)$ ，並且若 $U_2(f)$ 已量測出，則 $U_1(f)$ 可由公式(8)計算出來。

2.2.2 逆向運算

若已量測出上表面溫度 $u_1(t)$ 而欲求下表面溫度 $u_2(t)$ 時，由運算結果可得

$$T_{21}(f) = \frac{U_2(f)}{U_1(f)} \quad (10)$$

其中 $T_{21}(f)$ 稱作此系統的逆向運算的傳遞函數。若系統參數皆已知時，則傳遞函數 $T_{21}(f)$ 可以下式表示之

$$T_{21}(f) = \cosh\left(\frac{\sqrt{fi}}{k}l\right) \quad (11)$$

若 $U_1(f)$ 已量測出，則 $U_2(f)$ 可根據公式(10)計算出來。經離散化並取傅立葉逆轉換則可得到

$$u_2(t) = \sum_{n=-N}^N U_2(f_n) e^{i2\pi f_n t} \quad (12)$$

比較公式(10)和(12)，可知 $T_{21}(f)$ 與 T_{12} 互為倒數，並將它們繪於圖二(c)。

2.3 無限域帶狀拉普拉斯方程式

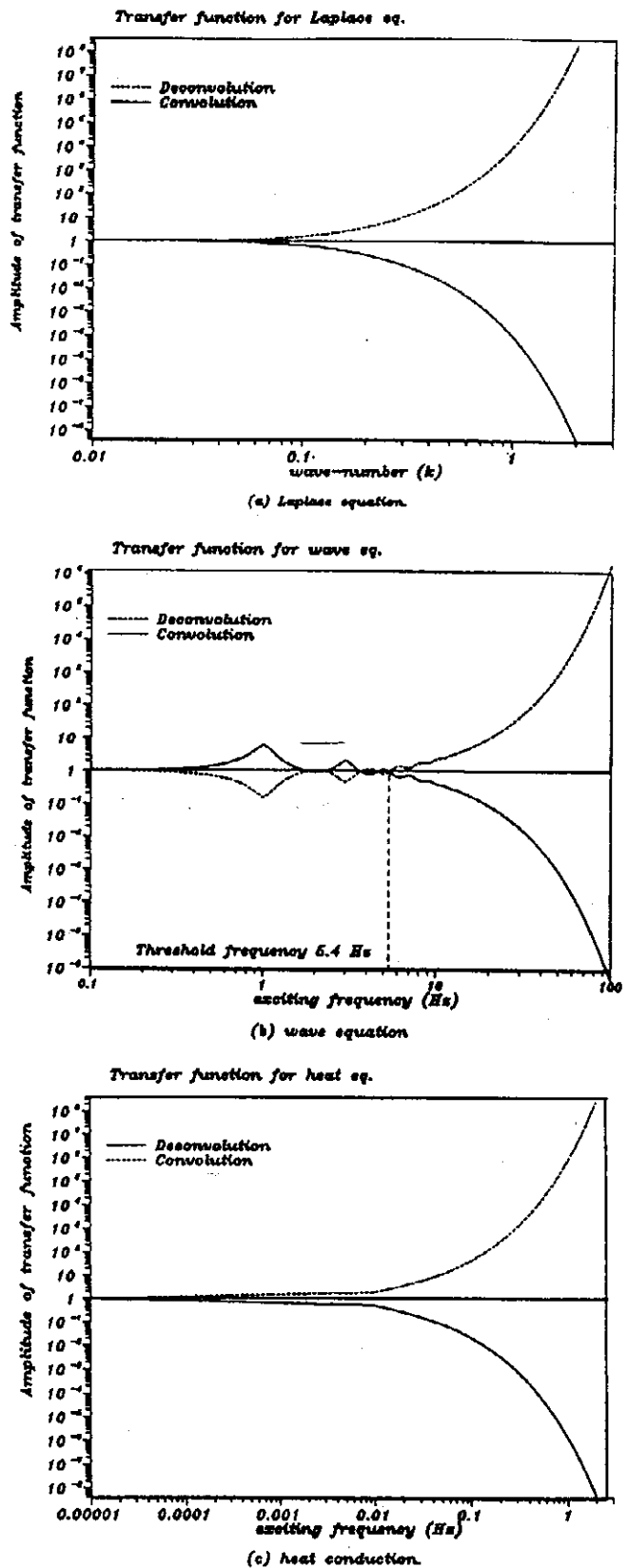
考慮如圖四與表一之系統，其帶狀區域間的厚度為 l ，上下表面分別以 $y = 0$ 和 $y = l$ 描述之，並假設上表面通量(ψ) 為零 (flux free)。

2.3.1 正向運算

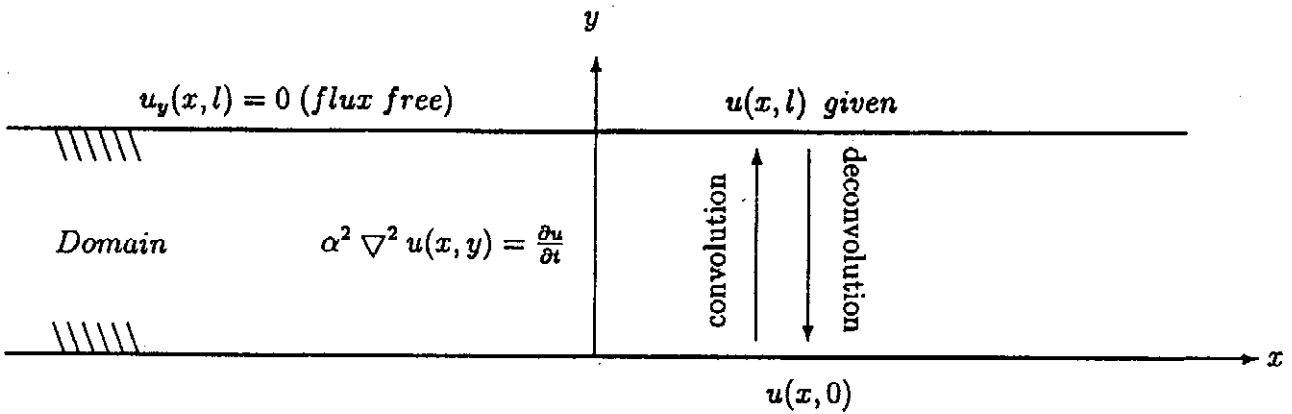
由圖四知，若給定下表面的勢能 ($\phi_{in}(x)$)，而欲推求上表面勢能 ($\phi_{out}(x)$) 時，將拉普拉斯方程式對 x 作傅立葉轉換後，可得下式

$$T_{12}(k) = \frac{\Phi_{out}(k)}{\Phi_{in}(k)} \quad (13)$$

其中 $T_{12}(k)$ 稱作此系統正向運算的傳遞函數，



圖二 波傳方程、熱傳方程式與拉普拉斯方程式的傳遞函數



圖三 熱傳方程式的數學模式

$\Phi_{in}(k)$ 及 $\Phi_{out}(k)$ 分別代表下表面溫度與上表面溫度之空間訊號的傅立葉轉換。傳遞函數 $T_{12}(k)$ 可以下式表示

$$T_{12}(k) = \frac{1}{\cosh(kl)} \quad (14)$$

若下表面 $\Phi_{in}(k)$ 已量測出，則上表面 $\Phi_{out}(k)$ 可由公式(13)計算出來。

2.3.2 逆向運算

若已知上表面勢能值 $\phi_{in}(x)$ ，而欲求下表面勢能值 $\phi_{out}(x)$ 的情況下，可得

$$T_{21}(k) = \frac{\Phi_{out}(k)}{\Phi_{in}(k)} \quad (15)$$

其中， $T_{21}(k)$ 稱作此系統的逆向運算的傳遞函數，並可以下式表示之

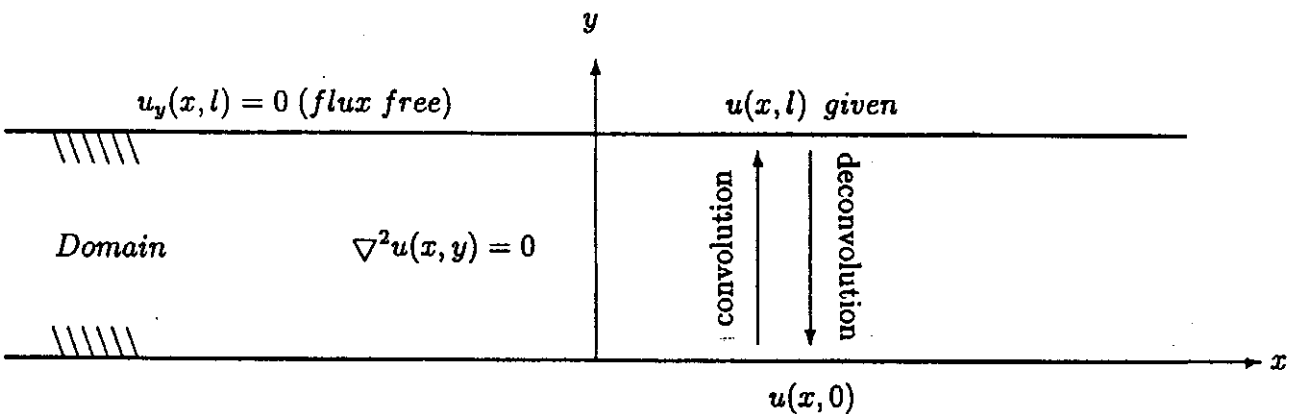
$$T_{21}(k) = \cosh(kl) \quad (16)$$

若 $\Phi_{in}(k)$ 已量測出，則 $\Phi_{out}(k)$ 可根據公式(15)計算出來。最後再取離散傅立葉反轉換，則可得到

$$\phi_{out}(x) = \sum_{n=-N}^N \Phi_{out}(k_n) e^{ik_n x} \quad (17)$$

比較公式(14)和(16)可知 $T_{21}(f)$ 與 T_{12} 互為倒數，如圖二(a)所示。

上述三種數學模式，其正算問題均為良態模式，而反算問題均為病態模式，且此類反算問題有一共同特性：即量測到的邊界條件係給過定的，而另一半邊界物理量，則全然未知。並可知正算的傳遞函數 (transfer function) 是一個有界函數 (bounded function)，並且在高頻率或高波數之處會隨頻率增加而呈指數衰減，由公式(2)、(9)、(14)與(5)、(11)、(16)兩組的比對可



圖四 拉普拉斯方程式的正算與反算之數學模式

看出反算問題的傳遞函數恰為正算問題的倒數，為一個無界函數 (unbounded function)，並且在高頻率或高波數之處會隨頻率（波傳與熱傳）或波數（拉普拉斯方程式）增加而以指數階數成長，詳見表一。因此只要有少許之誤差（如電腦精度受限、高頻雜訊干擾、量測誤差、樣本點數目有限...等），則反算問題的傳遞函數會使高頻率或高波數雜訊放大，以致會使解發散掉，這就是地盤反算所造成不合理結果的原因。另由表一比較以上三種問題，可得知無限域拉普拉斯方程式的病態指數最高，也就是解發散的最嚴重、最難加以處理的。

三、正規化法—加權視窗

為了處理易發散的病態問題，現今常以正規化技巧來改善病態的本質，降低對雜訊污染的敏感度而成為良態問題。當我們將系統離散化後，若以有限元素法或邊界元素法求解時，影響係數矩陣的反矩陣是必要的過程，正向運算的影響係數矩陣為非奇異且不是近乎奇異矩陣，傳統上可用來求此反矩陣的數值方法很多，例如 LU 分解法、QR 分解法等，這些方法都可得到不錯的結果，然而逆向運算的影響係數矩陣為近乎奇異矩陣即條件數很大，由於電腦本身精度問題，使得 LU 分解法、QR 分解法等都將失效。一般常用奇異值分解法 (Singular Value Decomposition, SVD) 降低條件數，使得原本正定矩陣變成半正定矩陣，SVD 的原理可參考 [1,13]。因為近乎零的奇異值將使解對於輸入資料的誤差非常敏感，資料空間的稍許誤差，將在解空間被不正常地放大，若我們使用 SVD 的技巧，讓近乎零的奇異值變為零，將可降低條件數，而改善病態矩陣成為良態矩陣。但多小的奇異值須做此處理，以往需靠分析者本身經驗來決定，本文亦提出 L 曲線觀念

來取代人為的判斷。

本文在連續系統中以傅立葉轉換來處理問題，處理病態方法為加權視窗的觀念，雖有異於上述之 SVD 方法，然其本質上則有共通之處，即消除高敏感度的雜訊。在地盤逆運算的頻率域上使用 Cesaro 視窗，而在過定邊界條件之拉普拉斯方程式的波數域上使用高斯視窗，這兩個視窗是一種權重函數，重新分配傳遞函數之各頻率或各波數的振幅，因而抑制了高頻率或高波數的振幅含量。而加權視窗本源自再生核的觀念，如 Cesaro [8], Gaussian [10], Dirichlet [7] 等再生核，均已被廣泛地應用在各領域上之反算問題。茲將這三個再生核整理成表二。以地盤逆運算為例，本文使用了 Cesaro 視窗，公式(7)將轉換成下式

$$u_b(t) = \sum_{n=-N}^N w_n^r U_b(f_n) e^{i2\pi f_n t} \quad (18)$$

其中 r 為 Cesaro 視窗的參數。權重 w_n^r 可以下式示之

$$w_n^r = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+r-n+1)}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+r+1)} \quad (19)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函數。當給過定邊界條件之拉普拉斯方程式使用了 $e^{-\alpha k^2}$ 高斯視窗後，公式(17)將轉換成下式

$$\phi_{out}^\alpha(x) = \sum_{n=-N}^N W_n^\alpha \Phi_{out}(k_n) e^{ik_n x} \quad (20)$$

其中高斯視窗函數 W_n^α 可以表示成 $e^{-\alpha k_n^2}$ ， α 為高斯視窗的參數。並由參考文獻 [10] 可得知再生解與原解的距離關係如下

$$|\phi_{out}^\alpha(x) - \phi_{out}(x)| \leq \left| c\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) \right| \quad (21)$$

上式中， $\phi_{out}^\alpha(x)$ 為 $\phi_{out}(x)$ 的再生解， c 為正整數。而且由表二可得下式

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_{out}^\alpha(x) = \phi_{out}(x). \quad (22)$$

由上二式可清楚知道為何很多學者喜歡使用高斯視窗，乃是因其有完整的學理證明。將上述兩個視窗分別繪於圖五(a),(b)。由這兩張圖可看出同一趨勢，越大的視窗參數值，則高頻率或

表二 再生核

	Dirichlet kernel	Cesaro(Fejer)kernel	Gaussian kernel
卷積公式	$\phi_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} W_k(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$	$\phi_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$	$\phi_{out}^\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(x - \tau)\phi_{out}(\tau)d\tau$
再生核	$W_k(x) = \frac{\sin[(k + \frac{1}{2})x]}{2\pi \sin \frac{1}{2}x}$	$W_N(x) = \frac{\sin^2[(N+1)\frac{x}{2}]}{2\pi(N+1)\sin^2 \frac{x}{2}}$	$W_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$
極限行為	$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(x) = \phi(x)$	$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(x) = \phi(x)$	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_{out}^\alpha(x) = \phi_{out}(x)$

高波數的振幅含量將分配越少，因而使解對高頻雜訊的干擾越不敏感，但過大的正規化參數將使解過於平滑因而使系統失真。因此，如何取得系統的扭曲度與解的平滑度間的平衡點相當重要，以下引入 Hansen 所提出的 L 曲線觀念來決定此一平衡點 [11]。

四、L 曲線的應用

為了得到最佳的視窗參數值，本文使用 L 曲線的觀念。在處理反算問題時，先給定再生核的參數值後，我們將已知端的邊界值經由逆向運算程序，可得到未知端的邊界值，再由未知端上的邊界值經由正向運算程序可得到已知端的邊界值，如圖一、三與四所示。此時即使在解析解未知的情況下，仍將已知端上的實際邊界值和所推導的邊界值取其相對誤差量，來當做 L 曲線的縱軸，而 L 曲線的橫軸為視窗參數值（如 Cesaro order 或 α 值）。就物理意義而言， x 軸的 α 值係解的平滑度指標，亦即 α 值取愈大，高頻或高波數的含量相對地降低，而使解愈加平滑。而 y 軸的模量 (norm)，則反映了解對輸入資料的敏感度指標。以 α 為零的未正規化的特例而言，模量值是很大的，這也就是不合理的發散結果的證據，如圖九與十六所示。為了建構整條 L 曲線，需變動不同的再生核參數值後，再將數個離散的點串連起來，可獲得類似 L 字型狀的曲線，轉折點是我們欲

求的最佳參數值，這也就是敏感度與頻平滑度的一個協商。由於篇幅有限，其數學原理可參考 [11]，在此工程應用中不加以詳述。

五、數值算例

5.1 地盤逆運算—單層土壤模式

為了說明 Cesaro 視窗和 L 曲線在地盤逆運算分析上的應用，我們選用圖一的單層土壤模式來當作例子。其中土壤層的厚度 50m，密度 2.0g/cm³，剪力波速 200m/s，阻尼比 10%。

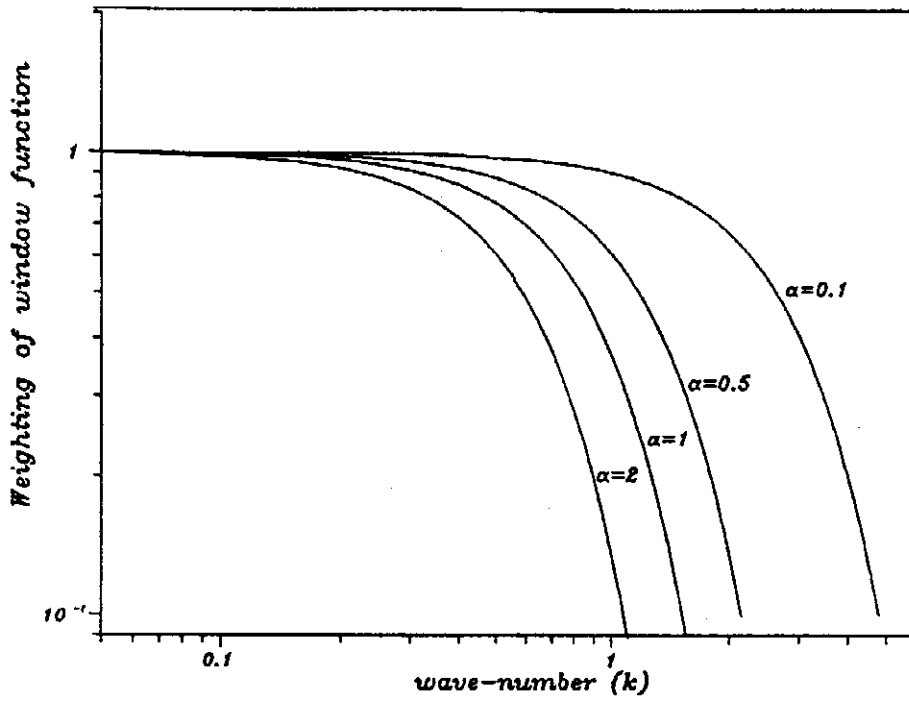
5.1.1 正算分析

給予圖六(a)之地盤運動 ($\ddot{u}_b(t)$) 其傅立葉頻譜如圖六(b)所示， $\ddot{u}_b(t)$ 的最大加速度為 0.1g，當使用正算分析程序後，可得地表加速度 ($\ddot{u}_g(t)$) 和它的傅立葉頻譜，如圖七所示， $\ddot{u}_g(t)$ 的最大加速度為 0.1615g。比較圖六(b)與圖七(b)， $\ddot{u}_g(t)$ 在低頻有較大的振幅，並集中在 1 和 3Hz，在高頻含量上比 $\ddot{u}_b(t)$ 較少。

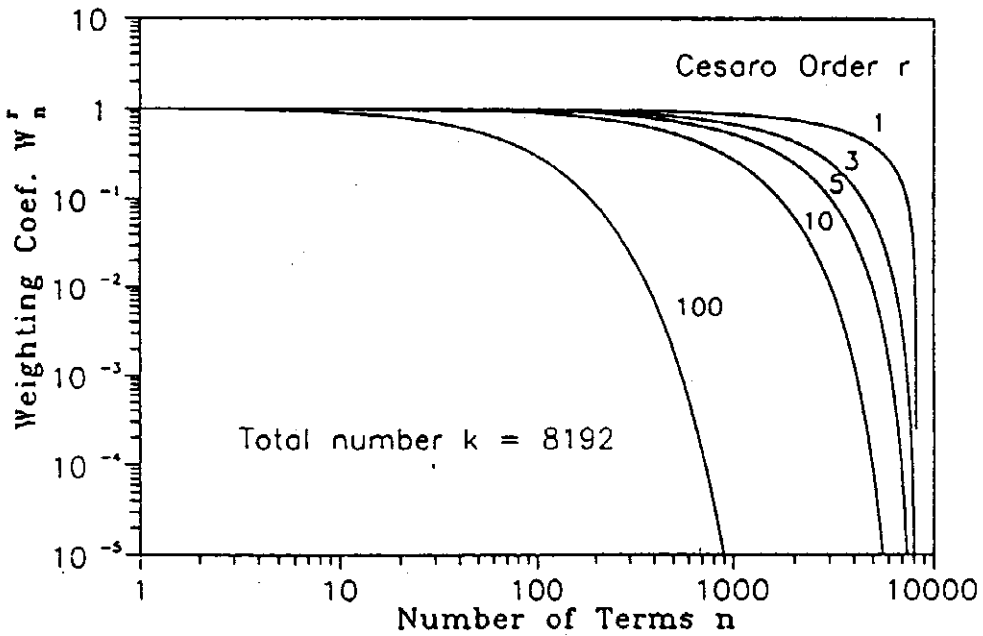
5.1.2 逆運算分析

由圖二(a)，我們可知此系統的第一、二、三模態頻率分別為 1, 3, 5Hz 且落於逆運算傳遞函數的波谷處，當頻率大於門檻頻率 (threshold frequency) (約 5.4 Hz) 時傳遞函數的振幅皆大於 1，且隨著頻率增加而遞增，此時只要有微量的高頻雜訊干擾，其解將有很嚴重的誤差量。

由 5.1.1 正算分析得到的地表加速度 $\ddot{u}_g(t)$



(a) Window function, $e^{-\alpha k}$.

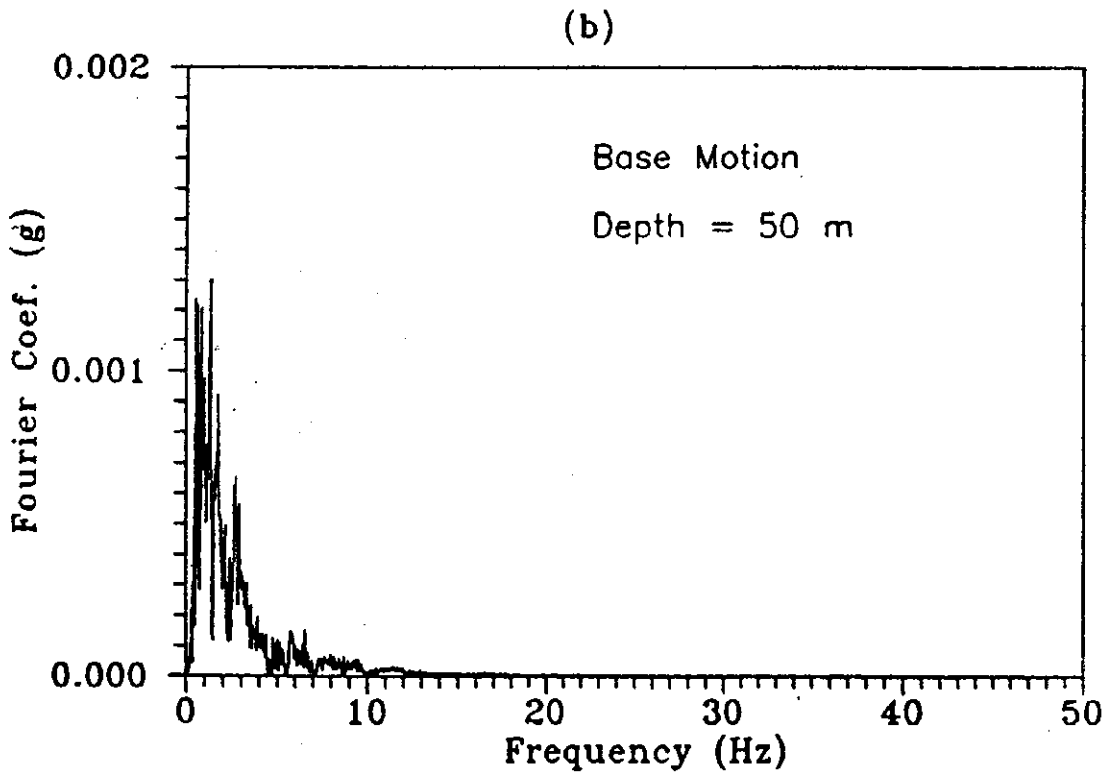
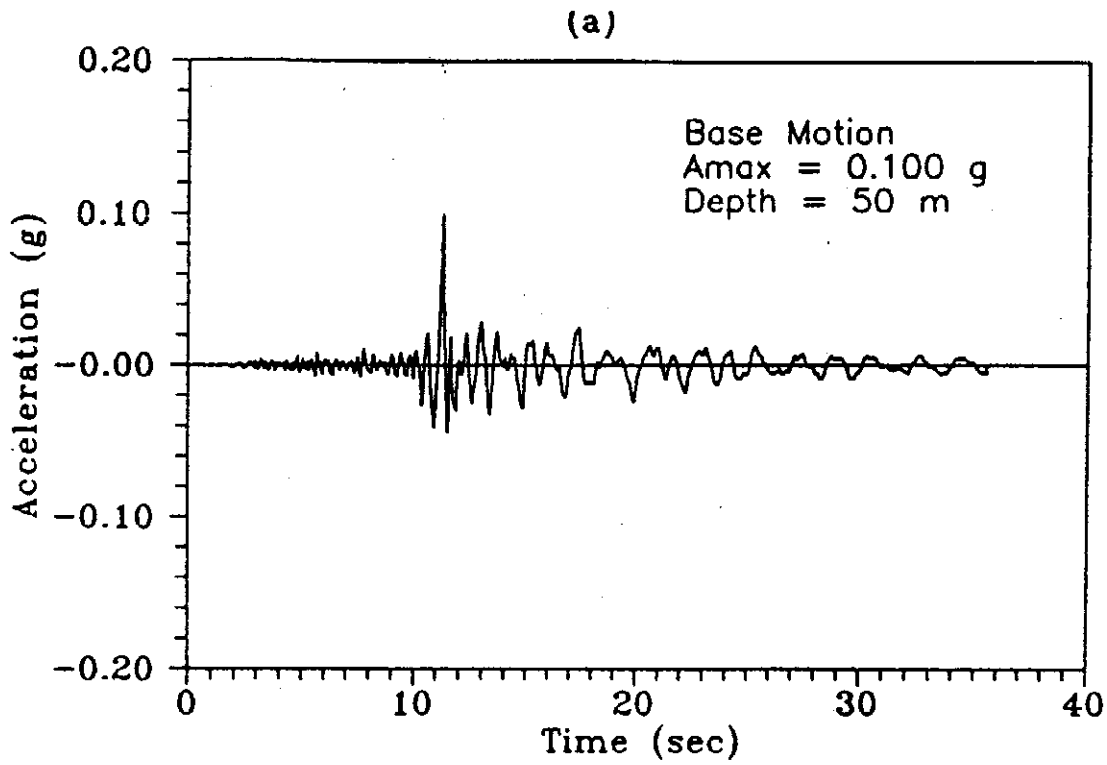


(b) Cesaro window function

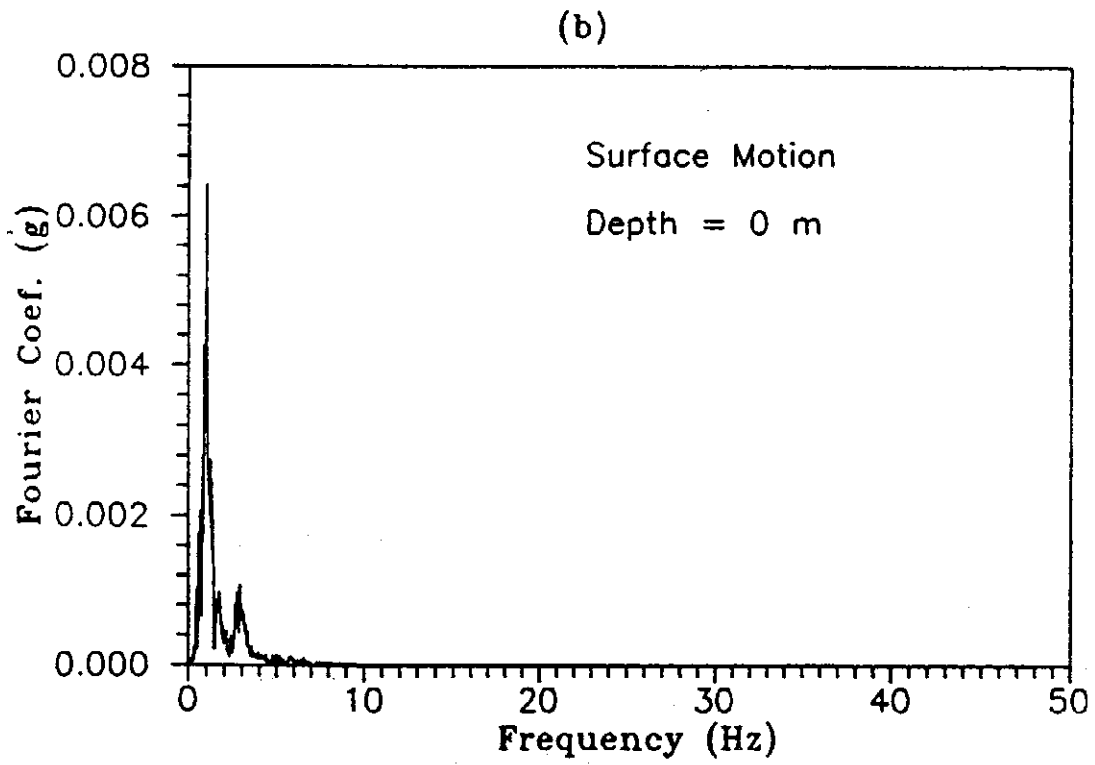
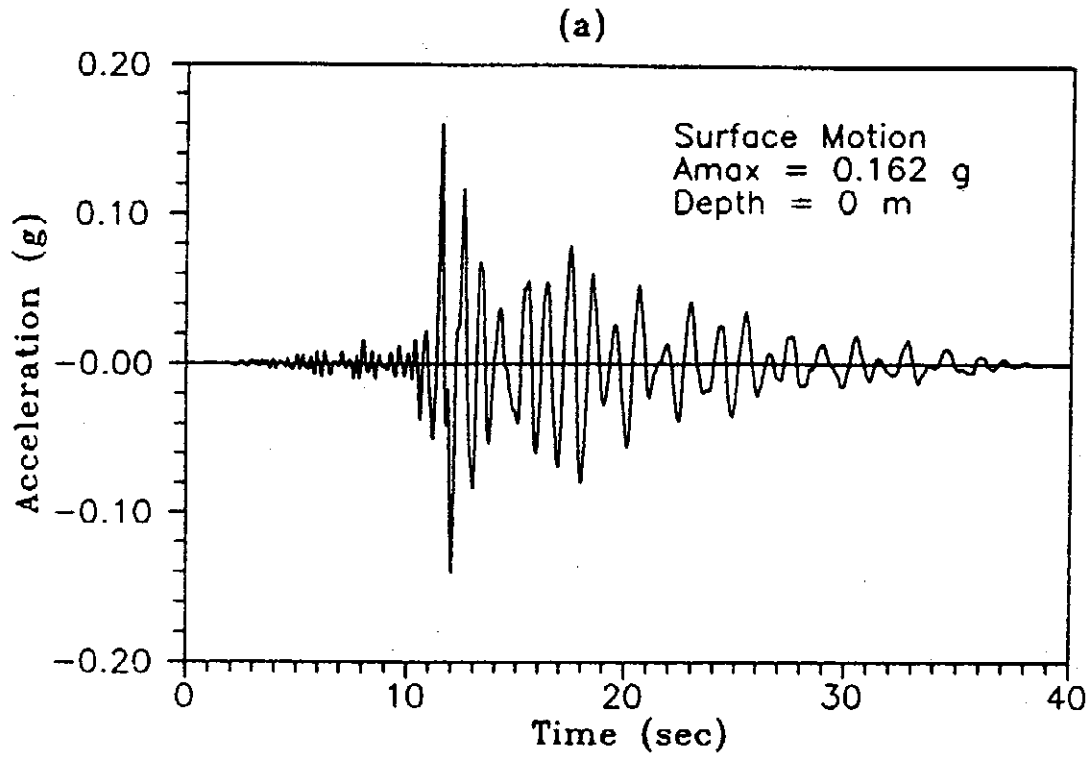
圖五 Cesaro 視窗與高斯視窗的權重分佈

當成已量測的邊界資料並添加 3% 的誤差，受污染的 $\ddot{u}_g(t)$ 以及傅立葉頻譜顯示在圖八，使用逆運算程序後，其 $\ddot{u}_b(t)$ 顯示在圖九，其所

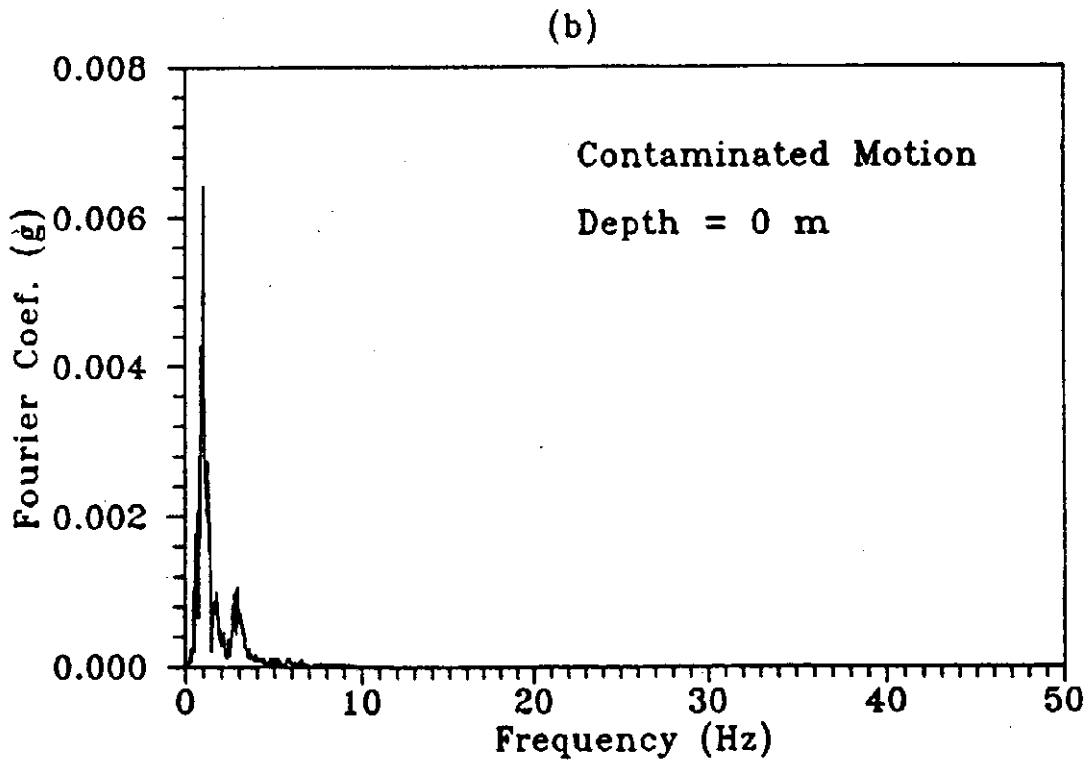
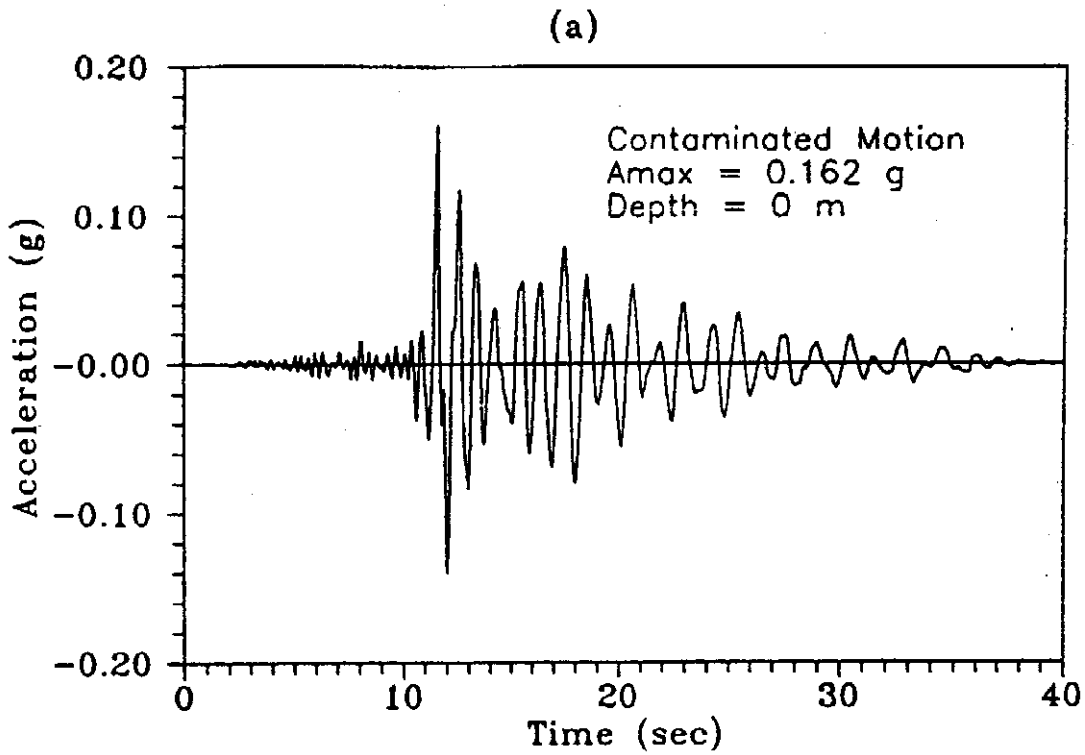
得的 $\ddot{u}_b(t)$ 具有太多高頻含量，為不合理的結果。當使用 Cesaro 視窗來正規化後，藉由上節所討論的方法，我們可建構出 L 曲線，繪於



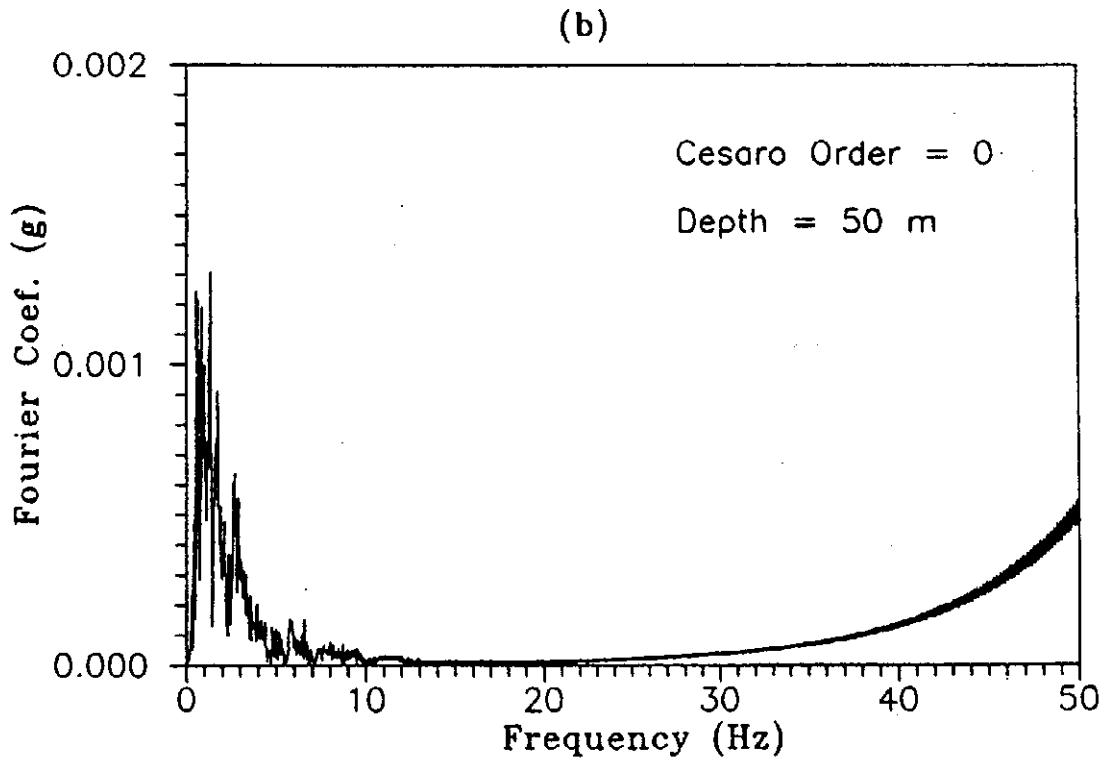
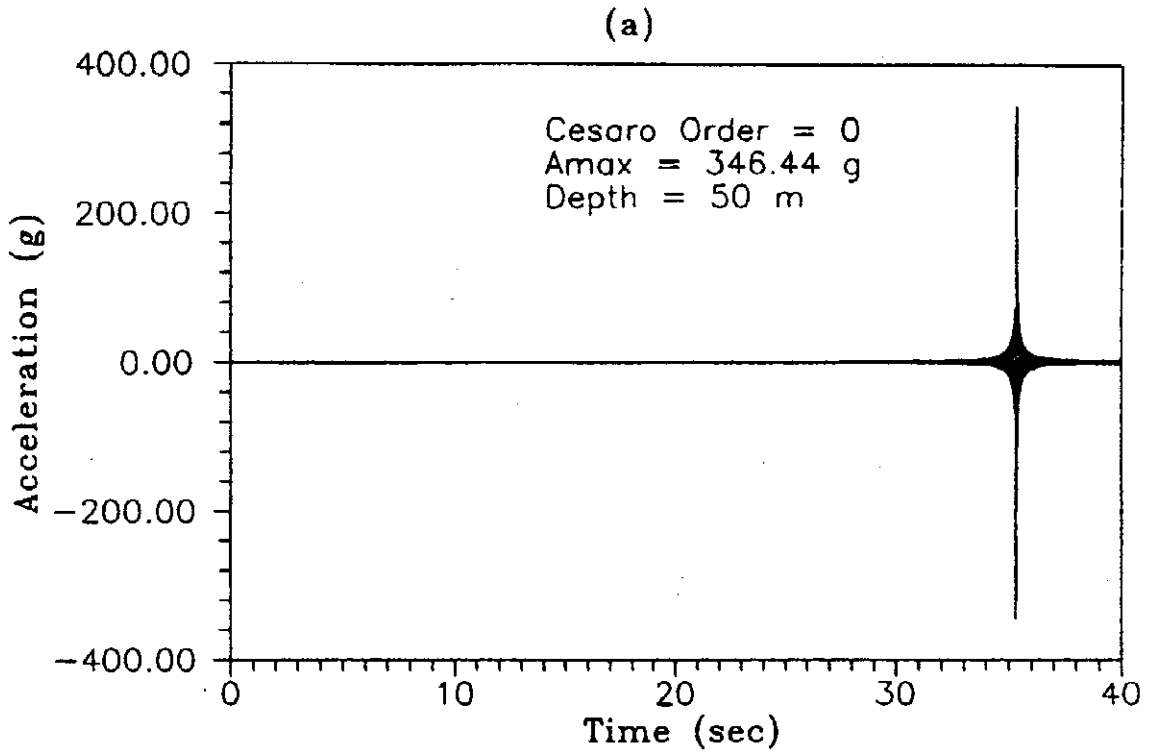
圖六 正向運算中，已量測的地盤運動 ($\ddot{u}_b(t)$) 的資料及其傅立葉頻譜



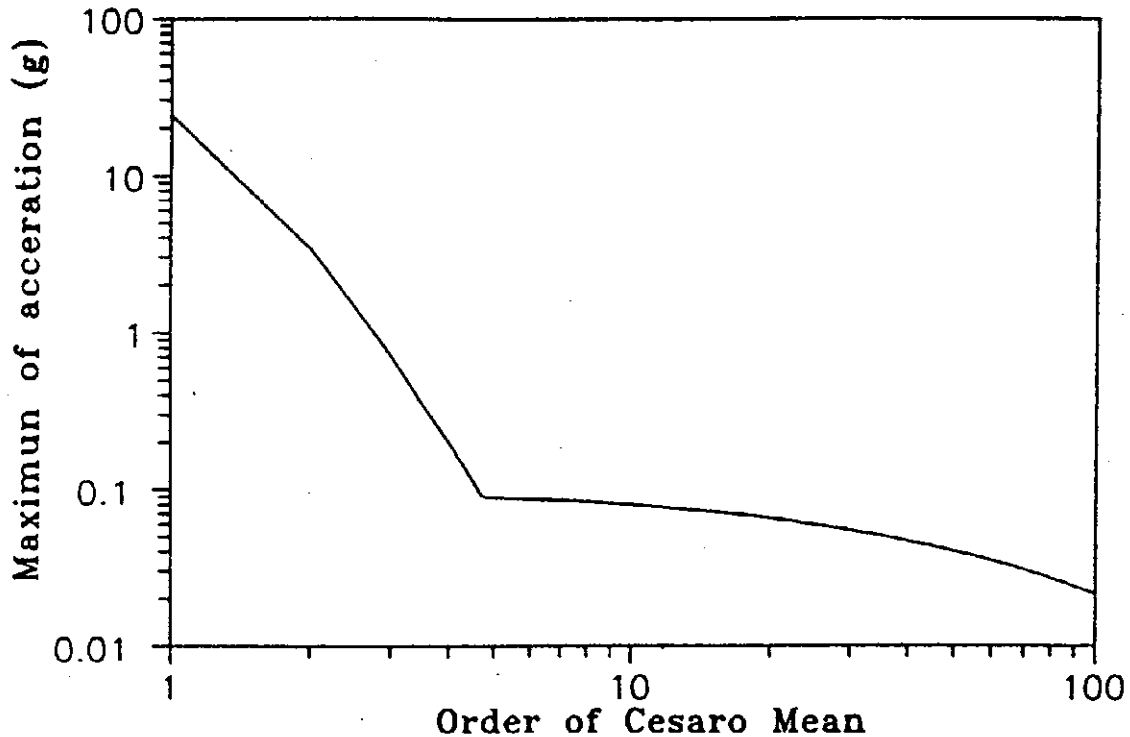
圖七 正向運算中，計算出來的地表運動($\ddot{u}_g(t)$)的資料及其傅立葉頻譜



圖八 逆向運算中，已量測的受污染的地表運動 ($\ddot{u}_g(t)$) 的資料及其傅立葉頻譜



圖九 逆向運算中，計算出來受污染之地盤運動 ($\ddot{u}_b(t)$) 的資料及其傅立葉頻譜



圖十 Cesaro 視窗正規化後所得L曲線

圖十。L 曲線上的轉折點為最佳化的點，其值 4.6，原始的傳遞函數與正規化後的傳遞函數繪予圖十一(a)。正規化後所求得的 $\ddot{u}_b(t)$ 顯示在圖十二，比較圖六與圖十二可知除了高頻含量稍有差異外，其餘看不出有何不同，而得到工程可參考的結果。

5.2 無限域帶狀拉普拉斯方程式

為了說明高斯視窗和 L 曲線在逆運算分析上的應用，我們選用圖四的模式來當作例子。其中層間的厚度 $1m$ 。

5.2.1 正算分析

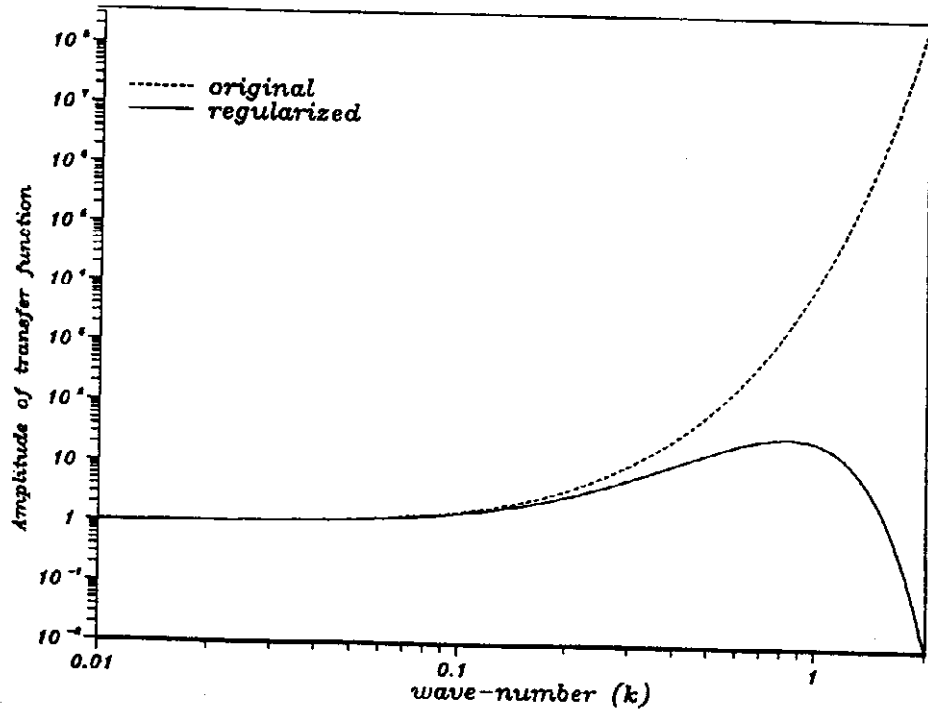
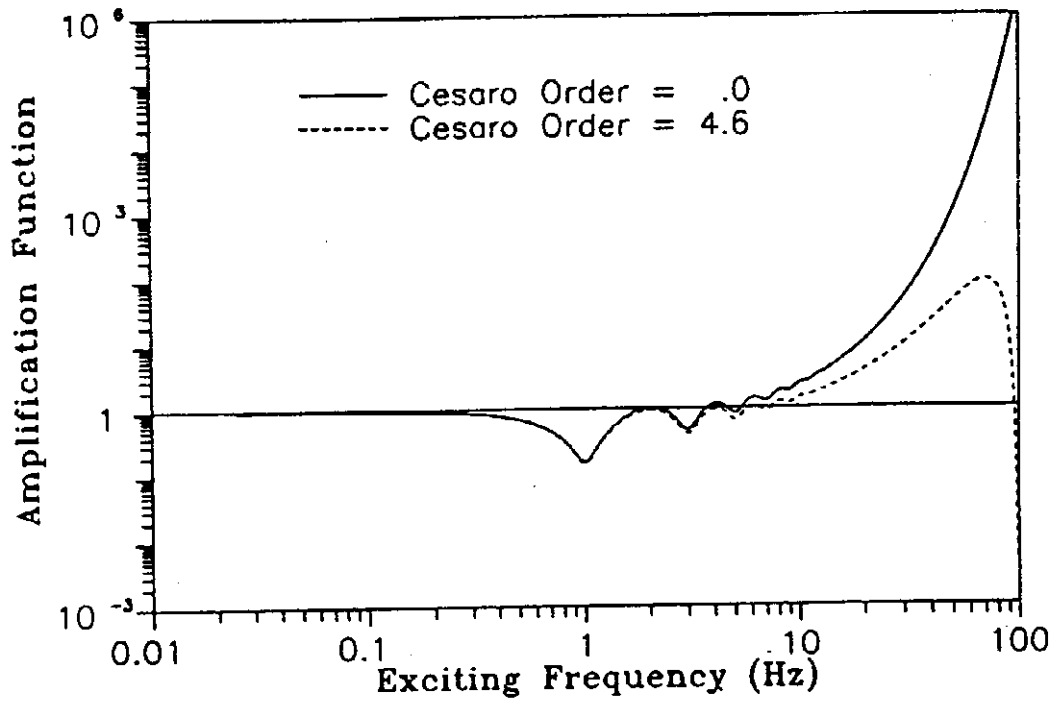
給予圖十三(a)之下表面的勢能值 ($\phi_{in}(x)$)，其傅立葉波譜如圖十三(b)所示。令上表面通量值 $\psi_{in}(x)$ 為零，當使用正算分析程序後，可得上表面的勢能值 $\phi_{out}(x)$ 和它的傅立葉波譜，如圖十四所示。比較圖十三(b)與圖十四(b)，可知 $\phi_{out}(x)$ 在高波數含量上比 $\phi_{in}(x)$ 較少。

5.2.2 逆運算分析

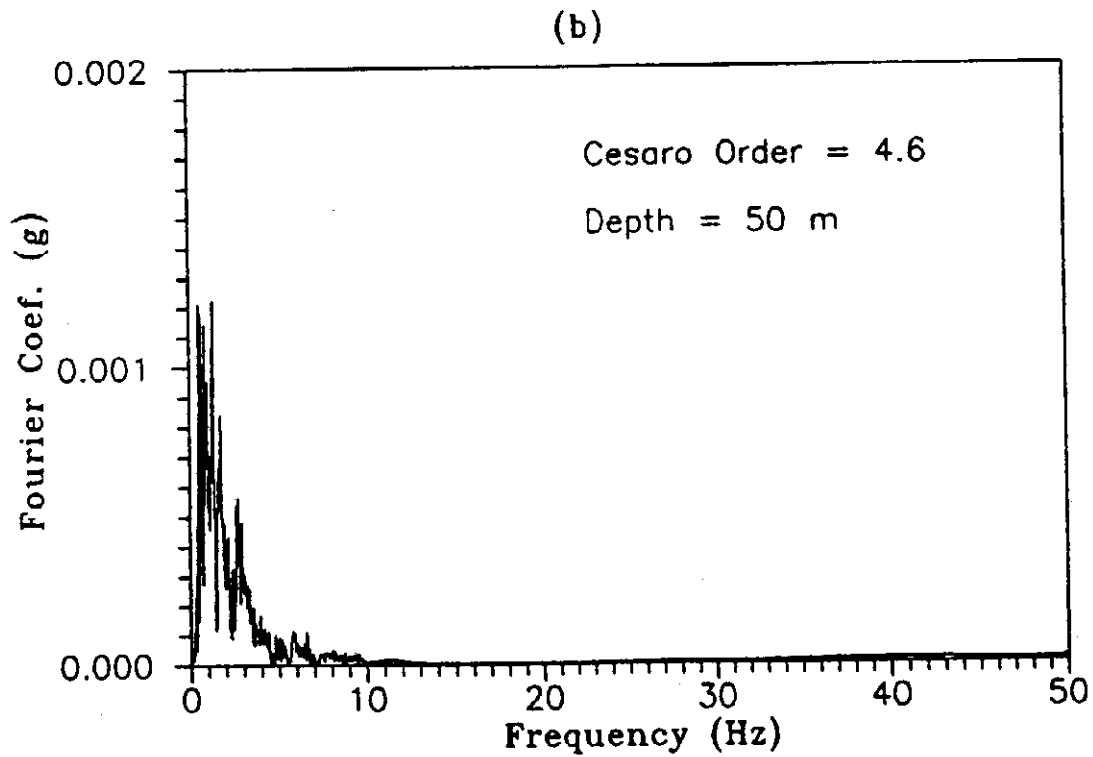
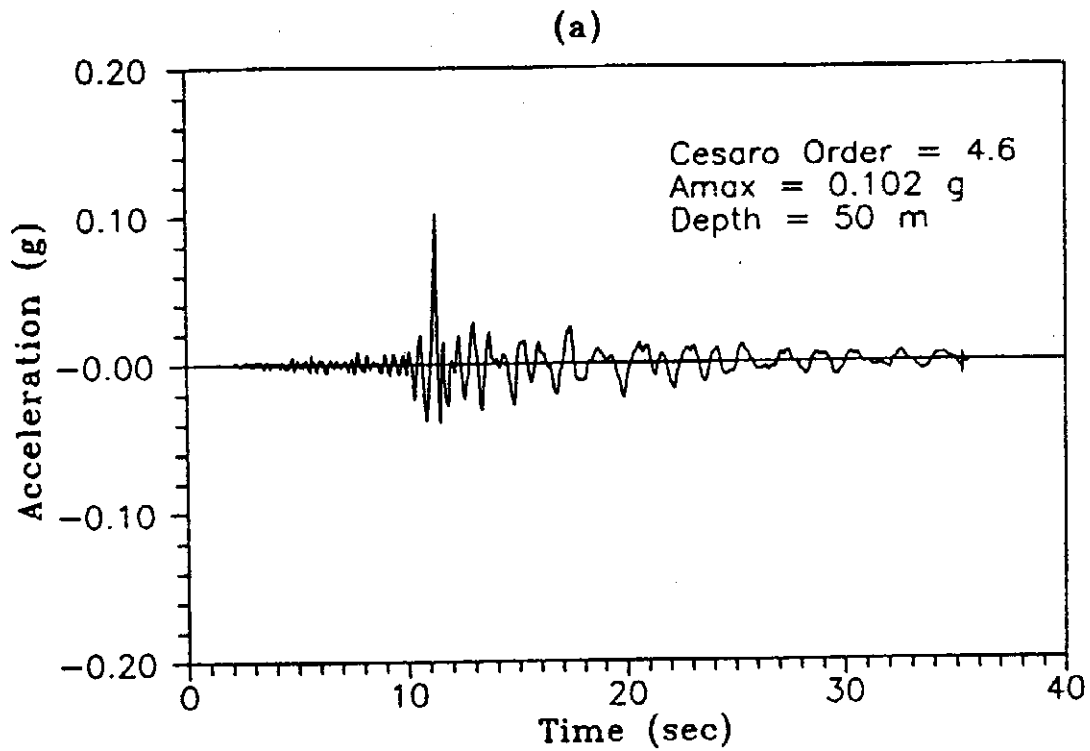
由圖二(c)，我們可知此系統的逆運算傳遞

函數的振幅皆大於 1，且隨著波數增加而遞增，此時只要有微量的高波數雜訊干擾，其解將有很嚴重的誤差量。

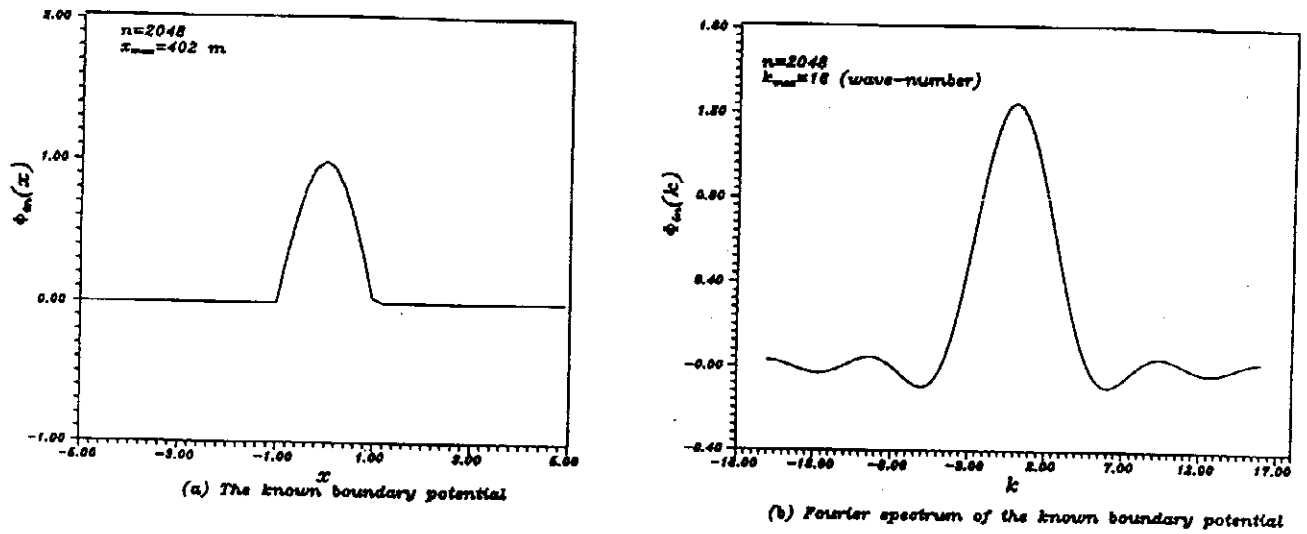
由 5.2.1 正算分析得到的上表面的勢能值，當做已知的邊界值 $\phi_{in}(x)$ ，添加 3% 的誤差，受污染的 $\phi_{in}(x)$ 以及傅立葉波譜顯示在圖十五，使用逆運算程序後，反算所得的下表面的勢能值 $\phi_{out}(x)$ 顯示在圖十六，可看出太多高波數含量，為不合理的結果。當使用高斯視窗來正規化後，我們可建構 L 曲線，繪於圖十七。L 曲線上的轉折點為最佳化的點，其參數值為 0.06，而原始的傳遞函數與正規化後的傳遞函數繪於圖十一(b)。正規化後所求得的 $\phi_{out}(x)$ 顯示在圖十八，而可得合理的結果。然而本例的已知邊界值 $\phi_{in}(x)$ 在 $x = 1$ 與 -1 處斜率不連續，所以未知邊界值 $\phi_{out}(x)$ 雖經正規化後並未完全吻合解析解，是可以接受的。由圖十二與十八可知加權視窗對於高波數含量有抑制的效果。



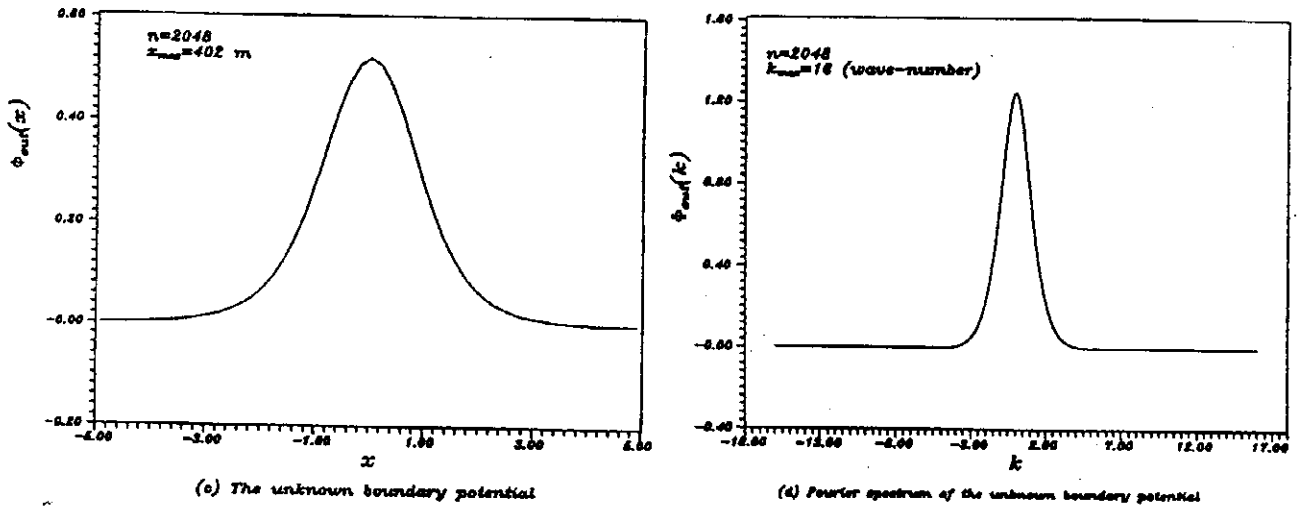
圖十一 Cesaro 視窗與高斯視窗正規化後的傳遞函數



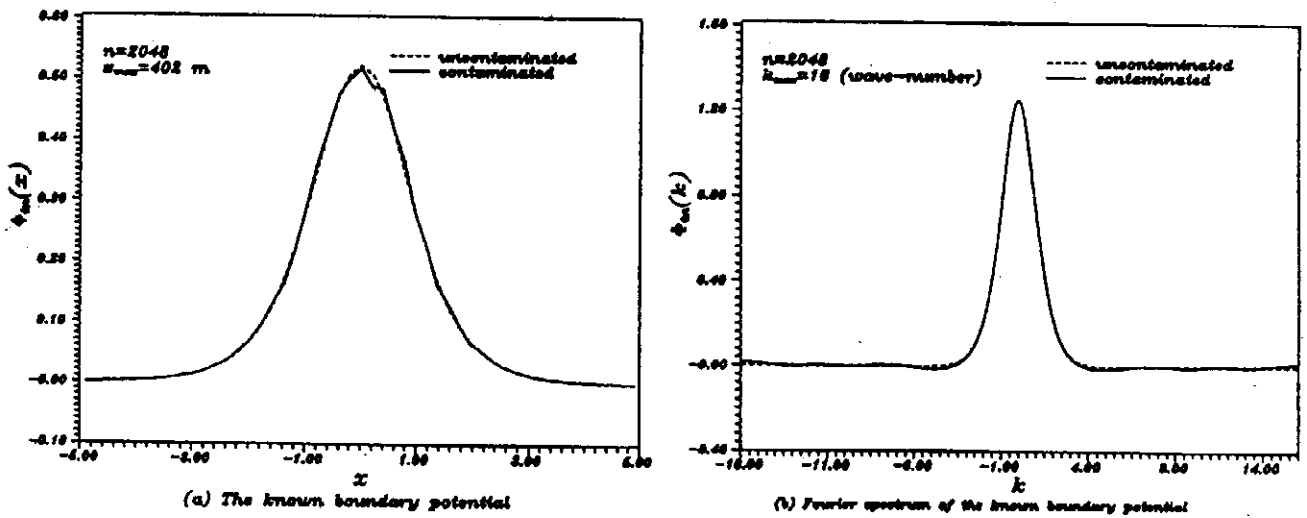
圖十二 Cesaro 視窗正規化後所得之最合理的結果以及傅立葉頻譜



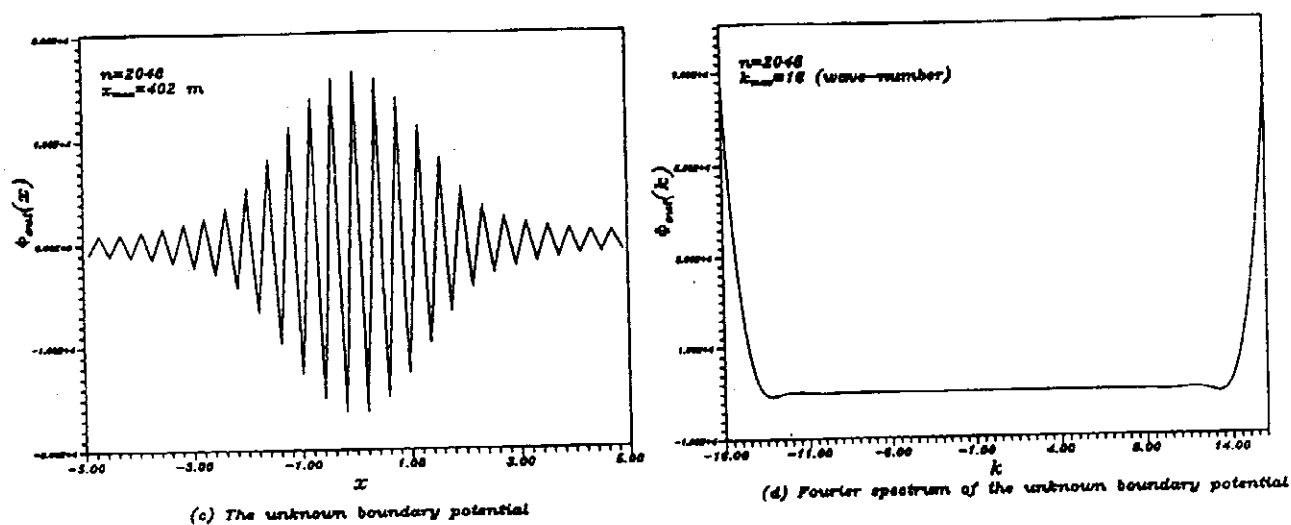
圖十三 正向運算中，已量測的下表面勢能值 ($\phi_{in}(x)$) 的資料及其傅立葉頻譜



圖十四 正向運算中，計算出來的上表面勢能值 ($\phi_{out}(x)$) 的資料及其傅立葉頻譜



圖十五 逆向運算中，已量測的受污染之上表面勢能值 ($\phi_{in}(x)$) 的資料及其傅立葉頻譜



圖十六 逆向運算中，計算出來的受污染之下表面勢能值 ($\phi_{out}(x)$) 的資料及其傅立葉頻譜

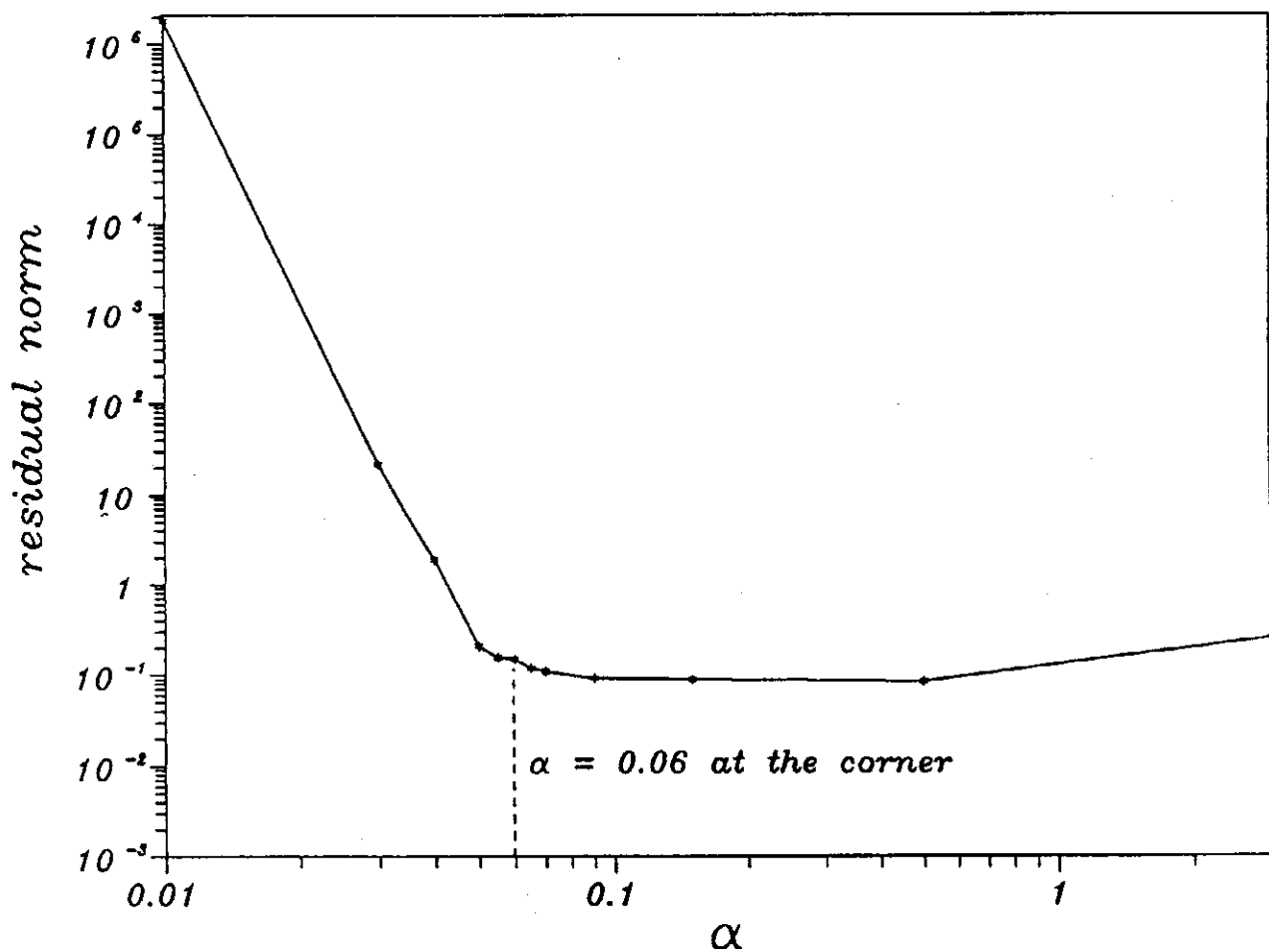
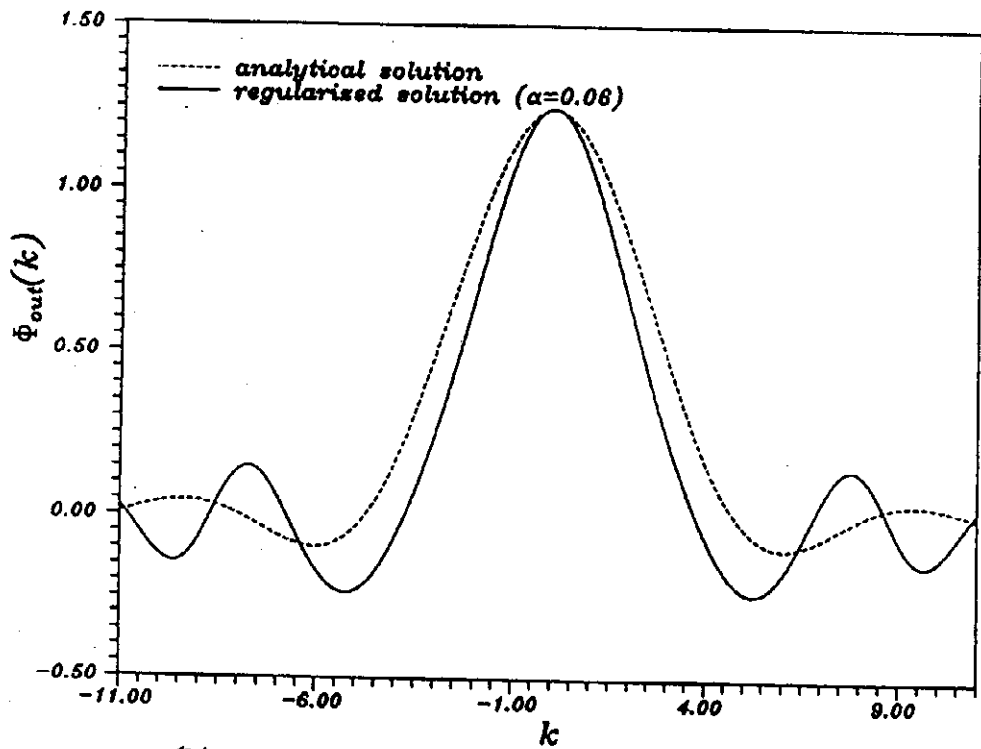
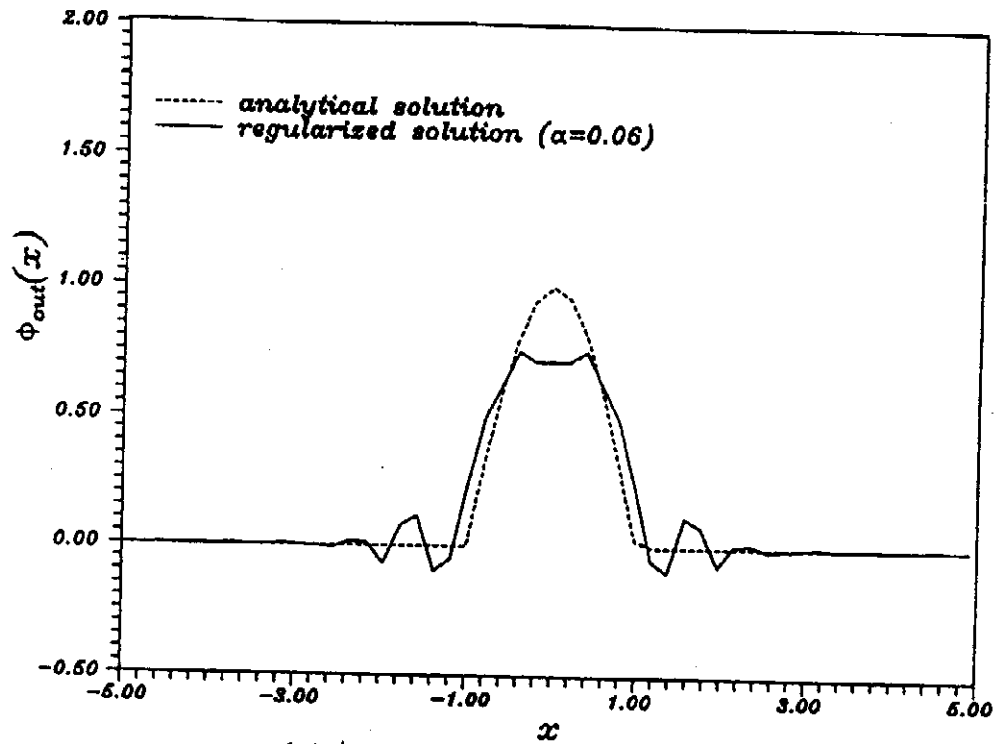


Figure 33 L-curve in the deconvolution analysis for case 2.

圖十七 高斯視窗正規化後所得 L 曲線



圖十八 高斯視窗正規化後所得之最佳的結果以及傅立葉頻譜

六、結論

本文已由數學模式的良態與病態行為來瞭解正算與反算問題的本質，經由對問題轉換的定義域來看，如在頻率域（波傳方程）或波數域（拉普拉斯方程）上均可看出傳遞函數的有界或無界，可區隔正算問題與反算問題。而未經正規化之反算所得的結果，係因無界的傳遞函數對於高頻或高波數對輸入含污染雜訊的放大效應。到此讀者應可瞭解到，處理如地盤逆運算等之反算問題，有賴於對解空間的掌握，從而對症下藥，方可有效解決此類的問題。本文已成功地舉了兩個測試例子加以說明，希望經由本文所介紹的再生核之加權視窗及 L 曲線觀念，而能使大地工程師對往後實際工程的逆向運算的本質有較清楚的認知，而對如何選擇切除頻率的大小有一學理的依據。

誌謝

本文感謝葉為忠、洪宏基、陳正興、陳立言與李洋傑等博士對本研究所提供的協助與幫忙。

參考文獻

1. 葉為忠，“反算問題專論講義”，海洋大學海工程學系，基隆，1996。
2. 陳正宗等，“有限元素分析與工程實例”，北門圖書，台北，1996。
3. 陳正宗與洪宏基，“邊界元素法”，新世界，台北，1992。
4. 林晉祥與趙炳焜，“地盤受震反應分析”，地工技術雜誌，頁 67-80，1985。
5. 林晉祥與趙炳焜，“地盤受震反應分析之二”，營建世界，頁 34-37，1985。
6. 黃光遠與劉小軍，“數學物理反問題”，山東科學技術出版社，濟南，1993。
7. Stakgold Ivar, “Green’s Functions and boundary Value Problems”, *John-Wiley, New York*, pp. 113-114, 1979.
8. Chen L. Y., Chen J. T., Hong H.-K. and Chen C. H., “Application of Cesàro Mean and the L-Curve for the Deconvolution Problem”, *Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, 14, pp. 361-373, 1995.
9. Yieh David, “An Inverse Problem in Elasticity”, Dissertation of Doctor of Philosophy, Northwestern University, 1991.
10. Ivanov V. K., “The Cauchy Problem for Laplace Equation in an Infinite Strip”, *Differentsial’nye Uravneniya*, 1, pp. 131-136, 1965.
11. Hansen Per Christian, “Analysis of Discrete Ill-Posed problems by Means of the L-Curve”, *SIAM Review*, 34 (4), pp. 561-580, 1992.
12. Chen J. T. and Chen K. H., “Analytical Study and Numerical Experiments for Laplace Equation with Overspecified Boundary Conditions”, Submitted for publication.
13. Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T. and Flannery Brian P., “Numerical Recipes in Fortran”, pp. 22-25, 1992.
14. Silva, W. J., “Soil Response to Earthquake Ground Motion”, EPRI Report NP-5747, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, 1988.

DECONVOLUTION ANALYSIS FOR SITE RESPONSE—AN ILL-POSED PROBLEM

Jeng-Tzong Chen and Kwe-Hoo Chen

Department of Harbor and River Engineering, National Taiwan Ocean University,
Keelung, Taiwan

Abstract

In this paper, the regularization techniques (Cesaro and Gaussian windows) are applied to regularize the divergence problems which occur in ground motion deconvolution and in the Laplace equation with overspecified boundary conditions. To deal with this ill-posed problem, the corner of the L-curve is chosen as the compromise point to determine the optimal window so that the high frequency or high wave-number(k) contents can be suppressed instead of engineering judgement using the concept of a cutoff wave-number. From the examples shown, it is found that reasonable solutions can be reconstructed, and that both the high frequency and high wave-number content of the divergent results can be avoided by using the proposed regularization techniques.

KEYWORDS: Site Response, Deconvolution, Ill-posed, Regularization, L-curve.