

模態反力法在支承運動問題的應用

陳正宗* 翁煥昌**

*國立臺灣海洋大學河海工程學系副教授

**國立臺灣海洋大學河海工程學系研究生

摘 要

由陳、洪與葉所提出的模態反力法[1,2]，能有效計算支承運動之模態參與係數，並已成功地應用在離散系統，在本文中我們採用此新方法，將其推廣到連續系統，並配合UBC規範規定的基底剪力模態質量比需大於90%的要求，來決定出模態動力分析中所須之最少模態數。而在多支承運動，每一支承的基底剪力模態質量總和，發現等於本文所定義之正規化擬靜態質量。若簡化為單支承結構時，正規化擬靜態質量恰等於結構總質量。經由功能互換原理可得，支承模態反力恰與支承運動的模態參與係數有關，因此可避免掉傳統方法須先計算擬靜態解（或稱影響向量(Influence vector)），然後才能求得模態參與係數的煩瑣過程。為說明模態反力法的觀念，本文以桿、樑與舊金山金門大橋的橋塔為例，在連續系統中求得模態參與係數，並與MSC/NASTRAN有限元素程式[2]比較，結果相當吻合。最後，本文針對以上之結構系統，建議符合UBC規範規定的最少模態數，供工程設計與模態動力分析參考。

一、前言

時變邊界條件問題，存在於一般振動問題上，舉凡飛彈飛行與橋樑受震等問題皆是，尤其在機械與土木上的應用而言，與時間相關邊界條件的振動問題均相當普遍。這些問題的特性在於邊界條件是時變的，因此解也是與時間相關的。時變的邊界條件問題在工程應用上常會碰到，例如地震時核電廠的管線或長跨徑的橋樑的反應，就是最典型的例子，當支承點的跨徑跟地震波的波長比起來很小時，此依時而變的邊界條件可視為相同，這就是所謂的單輸入(single input)的邊界支承條件，但當跨徑很長時，由於地形條件或震波的關係，如振幅衰減與相差，不同的支承邊界

就有不同的支承運動(support motion)，這就是所謂的多重輸入(multi-input)的運動。當然上述的說法是在忽略結構土壤互制效應下才成立的。對航空或航天結構而言，當飛行器於飛行過程中，也是典型的時變邊界條件問題。兩者所不同的是，前者是給定邊界位移歷程，係由地震記錄資料而得的支承運動；後者給定的是邊界小板壓力歷程，係由遙測資料而得。對於後者問題的解決，有一簡化方法，稱為慣性釋放(inertia relief)的觀念，在MSC/NASTRAN程式中即有此功能[3,4,5]，它是將已知的外力加諸於假設剛體的結構上，再求得其加速度反應後，以慣性力當成靜力負荷，求其相對於支承點束制後的變形。這個觀念，並沒有真正考慮動態的

慣性行為，只是一種近似的方法，因此常被稱為擬靜力分析(quasi-static analysis)。基於這個觀念來了解為何 Mindlin [8] 會將動力問題的解分成兩部分－擬靜力解與動態解是可以想像的。當結構勁度很大時，靜態解掌握了主要的部份。但對長跨徑的柔性結構而言，動態解則佔重要的角色，不可忽略。擬靜力解雖不考慮慣性效應，但仍為時間的函數，與支承運動歷程有關，動態解部份則考慮慣性效應並滿足齊次邊界條件。在文獻上，均先求得擬靜力解後，再利用它求動態解的廣義座標係數，最後再合併擬靜態解與動態解而得全解，一套免求擬靜態解的計算方法－對偶級數表示法已發展成功 [6,7,11]。在分析動力問題時，可採用直接暫態分析法或模態分析法。對支承運動問題而言，常用的方法很多，例如拉普拉斯轉換法，特徵函數展開法，Mindlin 和 Goodman 法 [8]，Erigen 和 Suhubi 法 [9]，Stokes 轉換法 [6] 等。以上所提到的方法，除了拉普拉斯轉換法以外，均用到模態疊加法的觀念。以模態分析而言，由所有模態貢獻總和可得到總反應，每一廣義座標值代表相對應模態之權重。模態座標值及支承基底剪力模態質量，分別意味著該模態佔結構總位移與支承總剪力的比例，模態參與係數則意味外力激發所分配到各模態參與的比例，詳細推導過程將於本文中說明。當激發由軋體力或邊界外力引起時，施力點處的模態位移量將與該模態參與係數有關。假如，當外力作用在某一模態的節點上時，則該模態的模態參與係數為零，因外力不作功。長久以來，對支承運動而言，模態參與係數均由影響向量求得，即 Mindlin 和 Goodman 所提出的擬靜態解的觀念，但是這套方法，不僅計算時間長且物理意義

不明確。尤其在三維連續系統的擬靜態解，更是不易求得，此點在 Eringen 與 Suhubi 書上亦曾提及 [9]。最近，由陳、洪與葉發現支承運動模態參與係數正比於支承處的模態反力 [1]。因此，若支承振動對應的束制點的模態反力為零，則模態參與係數為零。模態反力法不僅有明確的物理意義，而且節省大量的計算時間，然而，這個觀念並未見應用在套裝軟體上，如 ABAQUS, NASTRAN, ANSYS 等商業程式，因此，模態反力的輸出值一直未被重視，以 NASTRAN 為例，便有許多文獻 [12,13,14,15,16] 均以 DMAP 語言 [4,5]，以擬靜力解分離法，求得模態參與係數，而文獻 [2,10] 則避開擬靜態解之計算，直接以模態反力法的觀念應用在離散系統上，並由 NASTRAN 輸出的模態反力值，來計算模態參與係數，並驗證無誤。

基於多支承運動在地震工程 [8,17,18, 19,20] 的重要性，在本文我們將推廣模態反力法於連續系統，並且發現基底剪力模態質量等於本文所定義的正規化擬靜態質量。當簡化為單支承結構時，本文所定義的正規化靜態質量恰為結構總質量。配合無因次化之要求，基底剪力模態質量比可定義為基底剪力模態質量除以正規化擬靜態質量，最後利用 Parseval 定理，由能量守恆的客觀性要求，可證明基底剪力模態質量比總和恰為 1。最後，為滿足 90% 正規化擬靜態質量的 UBC 規範規定 [21]，所須要的最少模態數將能明確的掌握，於本文將有詳細的探討。

二、問題描述

一承受支承運動的結構系統，其動力控制方程式如下：

$$\mathcal{L}u(x, t) = -\rho\ddot{u}(x, t) - c\dot{u}(x, t) \quad (1)$$

其中， ρ 表示單位長度質量， c 表示阻尼係數， $u(x, t)$ 表示在 x 處時間 t 時的位移量， $\dot{u}(x, t)$ 表示速度， $\ddot{u}(x, t)$ 表示加速度，而 \mathcal{L} 表示運算元，分別為：

(1) : $\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial x} [EA \frac{\partial}{\partial x}]$,

懸臂桿受支承軸向振動如圖一(a)所示，

(2) : $\mathcal{L} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}$,

懸臂樑受支承橫向振動如圖一(b)所示，

(3) : $\mathcal{L} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

懸臂樑於端點處具有軸力及側向彈簧且支承受橫向振動如圖一(c)所示，

(4) : $\mathcal{L} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}$,

懸臂樑於端點處有側向彈簧並受支承橫向振動如圖一(d)所示，

其中， E 表示楊氏係數， I 表示轉動慣量， A

表示斷面面積， P 表示軸向壓力，而其對應的邊界條件分別表示如下：

結構型態(1)：

$$u(0, t) = f(t) \quad (2)$$

$$EA \frac{\partial u(h, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

結構型態(2)：

$$u(0, t) = f(t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u(h, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

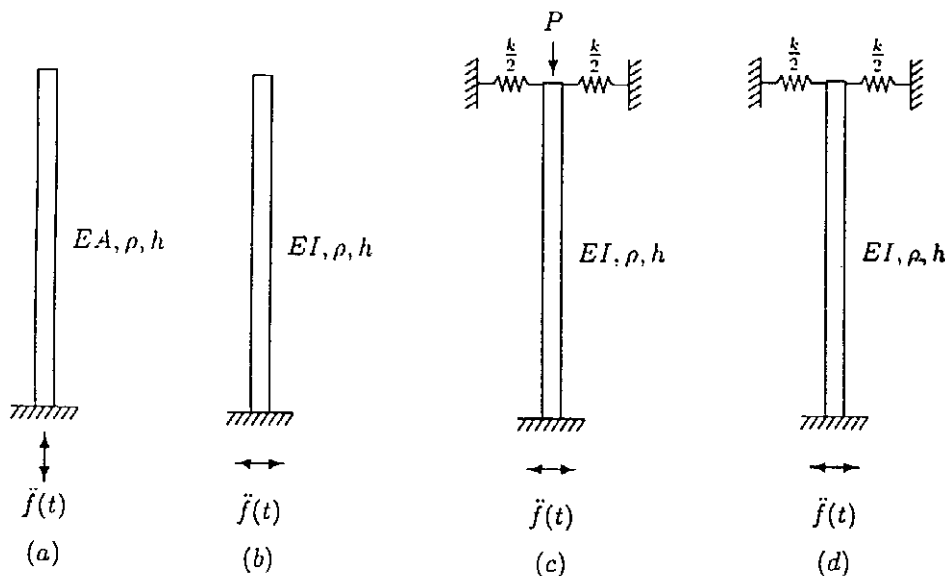
$$EI \frac{\partial^3 u(h, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (7)$$

結構型態(3)：

$$u(0, t) = f(t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u(h, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$



圖一 (a)受支承軸向振動之懸臂桿
 (b)受支承軸橫向振動之懸臂梁
 (c)在端點處具有軸力及側向彈簧且支承受橫向振動之懸臂梁
 (d)在端點處有側向彈簧並受支承橫向振動之懸臂梁

$$EI \frac{\partial^3 u(h, t)}{\partial x^3} + P \frac{\partial u(h, t)}{\partial x} - ku(h, t) = 0 \quad (11)$$

結構型態(4)：

$$u(0, t) = f(t) \quad (12)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u(h, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

$$EI \frac{\partial^3 u(h, t)}{\partial x^3} - ku(h, t) = 0 \quad (15)$$

其中， $f(t)$ 表示支承運動的位移歷程， k 表示彈簧勁度， h 表示結構長度。

三、理論推導

以單支承結構系統為例，可將位移函數 $u(x, t)$ 分解如下：

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad (16)$$

其中， $q_i(t)$ 為第 i 個模態 $\phi_i(x)$ 的廣義座標， $U(x, t)$ 表示擬靜力解位移，其外力只有支承運動引起的支承反力，而 $\phi_i(x)$ 為特徵解力系模態位移，其外力包含模態支承反力 (R_i) 與慣性力 ($\rho \omega_i^2 \phi_i(x)$)，此二力系分別滿足如下控制方程與邊界條件（以結構型態(3)為例）：

$$EIU''''(x, t) + PU''(x, t) = 0 \quad (17)$$

擬靜態解力系所滿足的邊界條件如下：

$$U(0, t) = f(t)$$

$$U'(0, t) = 0$$

$$U''(h, t) = 0$$

$$U'''(h, t) + \alpha^2 U'(h, t) - \beta U(h, t) = 0$$

其中，

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}, \beta = \frac{k}{EI}$$

特徵解力系滿足如下控制方程式：

$$\frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} - \frac{\omega_i^2 \rho}{EI} \phi_i(x) = 0 \quad (18)$$

其中， ω_i 表示第 i 個模態頻率。

特徵解力系邊界條件滿足如下：

$$\phi_i(0) = 0$$

$$\phi_i'(0) = 0$$

$$\phi_i''(h) = 0$$

$$\phi_i'''(h) + \alpha^2 \phi_i'(h) - \beta \phi_i(h) = 0$$

由此二力系的功能互換原理可得，

$$\int_0^h \rho \omega_i^2 \phi_i(x) U(x, t) dx = -R_i f(t) \quad (19)$$

其中， R_i 表示第 i 個模態在支承處的反力，亦即將式(18)的慣性力視為等效靜外力，在支承處所得的反力。令支承位移歷程 $f(t)=1$ ，可得

$$\int_0^h \rho \phi_i(x) U(x) dx = -\frac{R_i}{\omega_i^2} \quad (20)$$

其中， $U(x)=U(x, t)/f(t)$ 。將擬靜態解 $U(x)$ 以模態疊加表成如下，

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \quad (21)$$

將(21)式代入(20)式，並由模態的正交關係可得下式，

$$c_i \int_0^h \rho \phi_i^2(x) dx = -\frac{R_i}{\omega_i^2} \quad (22)$$

將 $\phi_i(x)$ 經由正規化可得，

$$\int_0^h \rho \phi_i^2(x) dx = 1 \quad (23)$$

因此，式(22)可導得，

$$c_i = -\frac{R_i}{\omega_i^2} \quad (24)$$

定義正規化擬靜態質量如下：

$$m_{qs} = \int_0^h \rho U^2(x) dx \quad (25)$$

將(24)式代入(25)式，配合模態正交關係可得，

$$\int_0^h \rho \left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \right] \left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \quad (26)$$

可將(26)式改寫式

$$u(x, t) = U(x)f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)q_i(t) \quad (27)$$

當地震輸入引起支承運動時，若將式(27)代入式(1)可得 $q_i(t)$ 的控制方程式如下：

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) \\ &= \frac{\int_0^h \rho\phi_i(x)U(x) dx}{\int_0^h \rho\phi_i^2(x) dx} \ddot{f}(t) = \Gamma_i \ddot{f}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

其中， ξ_i 表示第 i 個模態阻尼比， $c=2\xi_i\omega_i$ ， Γ_i 表示第 i 個模態的模態參與係數， $\ddot{f}(t)$ 表示支承處的運動加速度。

因此，由式(28)可看出模態參與係數如下：

$$\Gamma_i = \frac{\int_0^h \rho\phi_i(x)U(x) dx}{\int_0^h \rho\phi_i^2(x) dx} \quad (29)$$

由式(28)，上式可化簡成

$$\Gamma_i = \int_0^h \rho\phi_i(x)U(x) dx \quad (30)$$

式(30)表明了傳統計算模態參與係數，均需先行決定擬靜態解 $U(x)$ ，或稱影響向量。然而將式(30)與式(26)、(24)兩式比較可得，

$$\Gamma_i = -\frac{R_i}{\omega_i^2} = c_i \quad (31)$$

式(31)可避開擬靜態解 $U(x)$ ，直接由模態反力 R_i 計算模態參與係數，此即陳、洪與葉所提出的模態反力法。定義基底剪力模態質量 m_i 如下，

$$m_i = \Gamma_i^2 = \left(-\frac{R_i}{\omega_i^2}\right)^2 \quad (32)$$

由式(28)可得正規化擬靜態質量相等於基底剪力模態質量和

$$\begin{aligned} m_{qs} &= \int_0^h \rho U^2(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{R_i}{\omega_i^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \end{aligned} \quad (33)$$

最後，前 N 個基底剪力模態質量比可以無因次化表成如下型式：

$$\text{基底剪力模態質量比} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{m_{qs}} \quad (34)$$

根據(34)式，即可決定UBC規範所要求90%的最少模態數 N_{90} ，而當模態數 N 取無限多時，基底剪力模態質量比總和收斂為1.0。

四、求解流程

步驟1：擬靜態解與動態解的分解

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\phi_n(x) \quad (35)$$

其中擬靜態解依序如下：

結構型態(1)：

$$U(x) = 1 \quad (36)$$

結構型態(2)：

$$U(x) = 1 \quad (37)$$

結構型態(3)：

$$U(x) = 1 + \frac{-3\beta hx^2 + \beta x^3}{6 + 2h^3\beta} \quad (38)$$

結構型態(4)：

$$U(x) = \frac{\beta \tan(\alpha h) - \beta \sin(\alpha x) + \alpha \beta x + \alpha^3 - \alpha \beta h}{\alpha^3 - \alpha \beta h + \beta \tan(\alpha h)} \quad (39)$$

式(36)與(39)僅提供參考，因本文採用模態反力法而非傳統方法。

步驟2：特徵方程式及模態函數之決定

結構型態(1)：

特徵方程式可表示成：

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{AE}{\rho h^2}} \quad (40)$$

模態函數可表示成：

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2h}\right) \quad (41)$$

結構型態(2)：

特徵方程式可表示成：

$$\cosh(\lambda_n h) \cos(\lambda_n h) + 1 = 0 \quad (42)$$

其中，

$$\lambda_n^4 = \frac{\rho \omega_n^2}{EI}$$

模態函數可表示成：

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = & (\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)) \\ & - \frac{\cosh(\lambda_n h) + \cos(\lambda_n h)}{\sinh(\lambda_n h) + \sin(\lambda_n h)} (\sinh(\lambda_n x) \\ & - \sin(\lambda_n x)) \end{aligned} \quad (43)$$

結構型態(3)：

特徵方程式可表示成：

$$\begin{aligned} & 2\lambda_n^4 + (2\lambda_n^4 + \alpha^4) \cosh(\epsilon_n) \cos(\delta_n) \\ & - \alpha^2 \lambda_n^2 \sinh(\epsilon_n) \sin(\delta_n) + \frac{\beta}{h} \sqrt{4 + (\alpha/\lambda_n)^4} \\ & (\epsilon_n \cosh(\epsilon_n) \sin(\delta_n) - \delta_n \sinh(\epsilon_n) \cos(\delta_n)) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

模態函數可表示成：

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = & \frac{\delta_n^2 \sin(\delta_n) + \epsilon_n \delta_n \sinh(\epsilon_n)}{\delta_n^2 \cos(\delta_n) + \epsilon_n^2 \cosh(\epsilon_n)} \\ & (\cosh(\frac{\epsilon_n}{h} x) - \cos(\frac{\delta_n}{h} x)) \\ & + (\sin(\frac{\delta_n}{h} x) - \frac{\delta_n}{\epsilon_n} \sinh(\frac{\epsilon_n}{h} x)) \end{aligned} \quad (45)$$

其中，

$$\delta_n = h \sqrt{(\lambda_n^4 + (\frac{\alpha^4}{4}))^{1/2} + \frac{\alpha^2}{2}} \quad (46)$$

$$\epsilon_n = h \sqrt{(\lambda_n^4 + (\frac{\alpha^4}{4}))^{1/2} - \frac{\alpha^2}{2}} \quad (47)$$

結構型態(4)：

特徵方程式可表示成：

$$\begin{aligned} & 2\lambda_n^4 + (2\lambda_n^4) \cosh(\epsilon_n) \cos(\delta_n) + 2\frac{\beta}{h} (\epsilon_n \cosh(\epsilon_n) \sin(\delta_n) \\ & - \delta_n \sinh(\epsilon_n) \cos(\delta_n)) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

模態函數可表示成：

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = & \frac{\sin(\delta_n) + \sinh(\epsilon_n)}{\cos(\delta_n) + \cosh(\epsilon_n)} (\cosh(\frac{\epsilon_n}{h} x) - \cos(\frac{\delta_n}{h} x)) \\ & + (\sin(\frac{\delta_n}{h} x) - \sinh(\frac{\epsilon_n}{h} x)) \end{aligned} \quad (49)$$

步驟3：支承處模態反力之決定

結構型態(1)：

$$R_n = EA\phi'_n(0) \quad (50)$$

結構型態(2)：

$$R_n = EI\phi''_n(0) \quad (51)$$

結構型態(3)：

$$R_n = EI\phi'''_n(0) + P\phi'_n(0) \quad (52)$$

結構型態(4)：

$$R_n = EI\phi''''_n(0) \quad (53)$$

步驟4：模態參與係數之決定

$$\Gamma_{nj} = \frac{R_{nj}}{\omega_n^2} \quad (54)$$

其中， R_{nj} 表示第j個支承處第n個模態的反力， Γ_{nj} 為第j個支承處第n個模態之模態參與係數。

步驟5：基底剪力模態質量之計算與達90%規範要求模態數 N_{90} 之決定

$$m_{nj} = \left(\frac{R_{nj}}{-\omega_n^2}\right)^2 \quad (55)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N_{90}} m_{nj}}{\int_0^l \rho U^2(x) dx} > 90\% \quad (56)$$

其中， m_{nj} 表示第j個支承處第n個模態的基底剪力模態質量。

五、分析結果與討論

本文列舉四個典型的受支承運動結構，如圖一(a)~(d)所示，其基本的結構資料為 $h=214.1m$, $P=245351kN$, $E=199766000 kN/m^2$, $I=39.24m^4$, $k=304934kN/m$, $A=0.536m^2$ ，此數據係取自舊金山金門大橋的橋塔設計圖 [18]，由步驟 3. 可分別求出模態反力，進而由步驟 4. 求得模態參與係數，再由步驟 5. 可分別求得基底剪力模態質量與所須之最少模態數 N_{90} ，表一為由式(25)求得各結構的正規化擬靜態質量，表二與表三分別為各結構連續系統與離散系統的基底剪力模態質量比，表四為符合 UBC 規範 90% 的正規化擬靜態質量所需的最少模態數，從附圖與附表中可歸納出如下幾點：

1. 圖二為比較傳統方法（式(30)）與模態反力法（式(31)），在求模態參與係數計算時間上的差異，可看出在離散系統中，自由度取越多，本文方法所節省的 CPU 計算時間

- 越多，以 640 個自由度為例，模態反力法所須的 CPU 時間僅為傳統方法的百分之一。
- 2. 由結構型式圖一(a)~(d)可知，側向彈簧有加勁的作用，而軸向壓力有減勁的作用，故由圖三與圖四（側向彈簧的影響），圖五與圖六（軸向壓力的影響）比較可看出結構物的勁度越強，所須取的模態數要越多，方能達 UBC 規範 90% 要求。
- 3. 由圖七、圖八、圖九與圖十分別為離散系統與連續系統的誤差比較，可發現兩種方法所得結果相當吻合。
- 4. 因多支承結構的正規化擬靜態質量，有時不容易算得，見式(17)與式(25)，但根據式(33)，可將基底剪力模態質量 and 收斂到某一數值時，做為其正規化擬靜態質量，同樣可免去計算擬靜態解的煩鎖過程。
- 5. 由本文的探討中發現，模態參與係數與該模態支承反力成正比，與該模態頻率平方成反比，相較於傳統方式求取模態參與係數，更有明確的物理意義。

表一 (a)~(d)的正規化擬靜態量

結構型態	(a)	(b)	(c)	(d)
正規化擬靜態質量 $\int \rho U^2(x) dx$	ρh	ρh	$0.486\rho h$	$0.487\rho h$

表二 (a)~(d)以連續系統求得的基底剪力模態

結構型態	正規化擬靜態質量	1	2	3	4	5	6	7	8
a	ρh	81.1%	90.1%						
b	ρh	61.3%	80.0%	86.6%	90.0%				
c	$0.488\rho h$	53.5%	68.4%	76.2%	82.0%	85.9%	88.6%	90.6%	
d	$0.487\rho h$	52.3%	67.0%	75.0%	81.1%	84.8%	87.6%	89.7%	91.2%

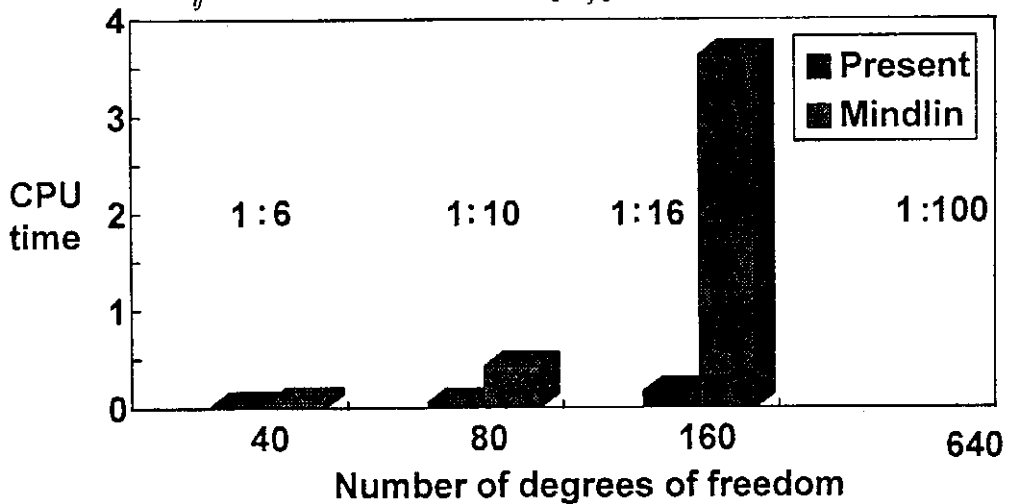
表三 (a)~(d)以離散系統求得的基底剪力模態質量比

結構型態	正規化擬靜態質量	1	2	3	4	5	6	7	8
a	ρh	80.9%	90.0%						
b	ρh	61.0%	79.9%	86.4%	91.7%				
c	$0.488\rho h$	52.9%	67.7%	75.2%	81.0%	84.9%	87.6%	90.5%	
d	$0.487\rho h$	52.3%	66.9%	74.5%	80.2%	84.1%	86.8%	88.7%	90.2%

表四 (a)~(d)符合UBC規範90%的正規化擬靜質量所須的最少模態數

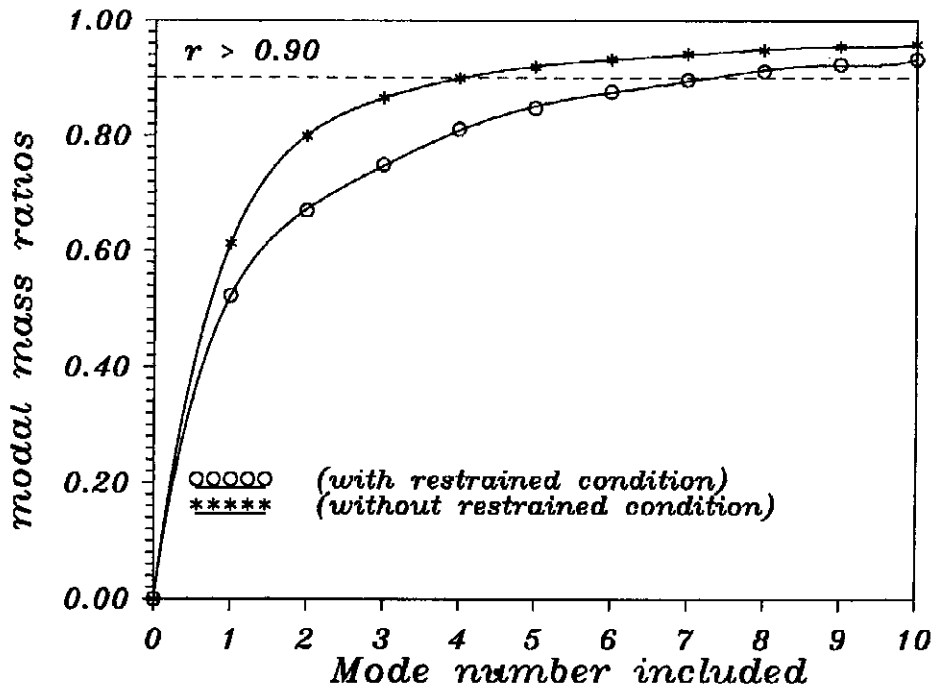
case	(a)	(b)	(c)	(d)
N_{90}	2	4	7	8

	Present	Mindlin
Continuous system	$\Gamma_{ij} = \frac{R_{ij}}{(-\omega_i^2)}$	$\Gamma_{ij} = \int \rho \phi_i(x) U(x) dx$ $U(x)$: quasi-static solution
Discrete system	$\Gamma_{ij} = \frac{R_{ij}}{(-\omega_i^2)}$ R_{ij} : modal reaction	$\Gamma_{ij} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ 0 \end{Bmatrix}^T [M] \{G_j\}$ $\{G_j\}$: quasi-static solution

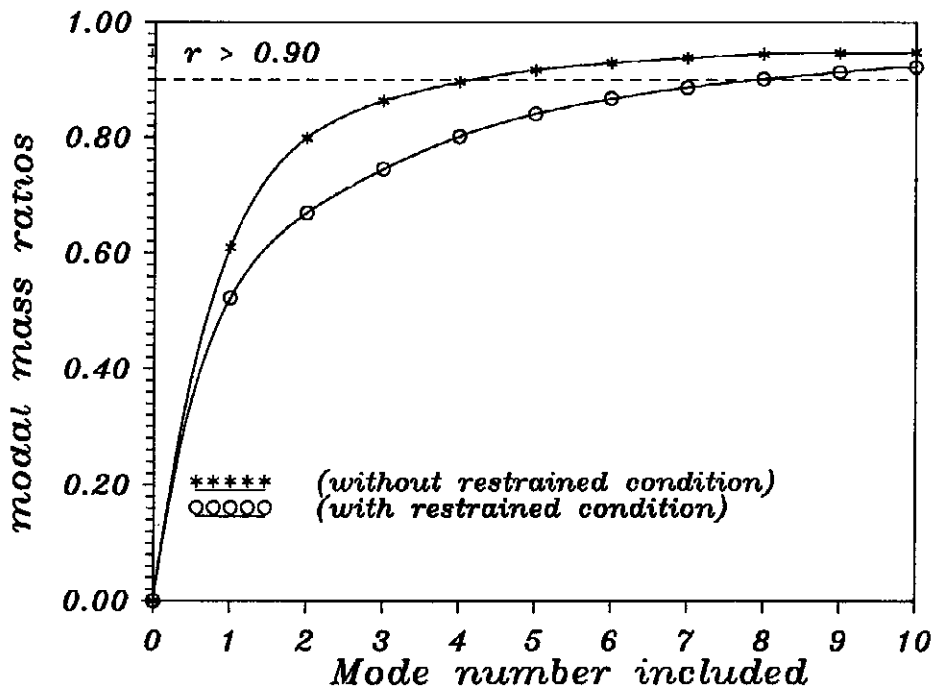


civil1.pptc

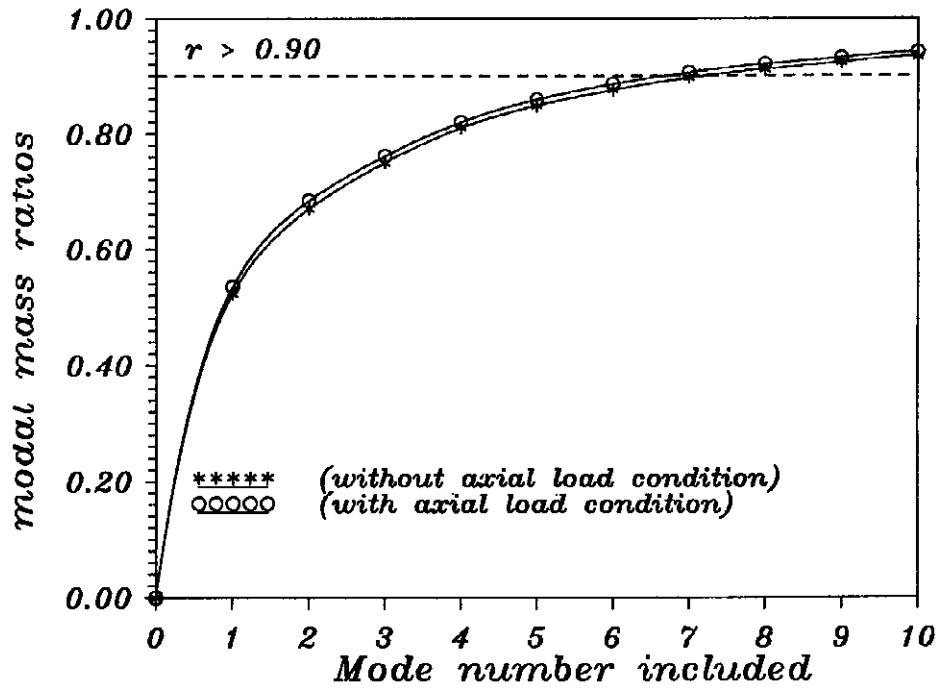
圖二 模態反力法與傳統方法在模態參與係數計算時間上的比較



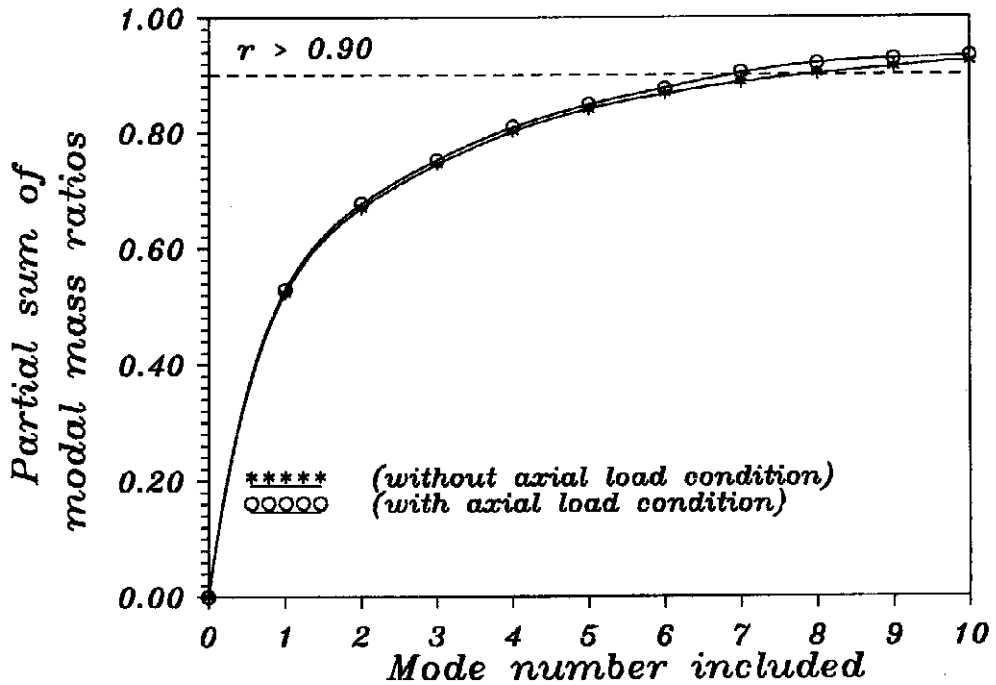
圖三 連續系統中，比較懸臂梁在端點處有無側向彈簧的作用，對基底剪力模態質量比與所須之最少模態數的影響



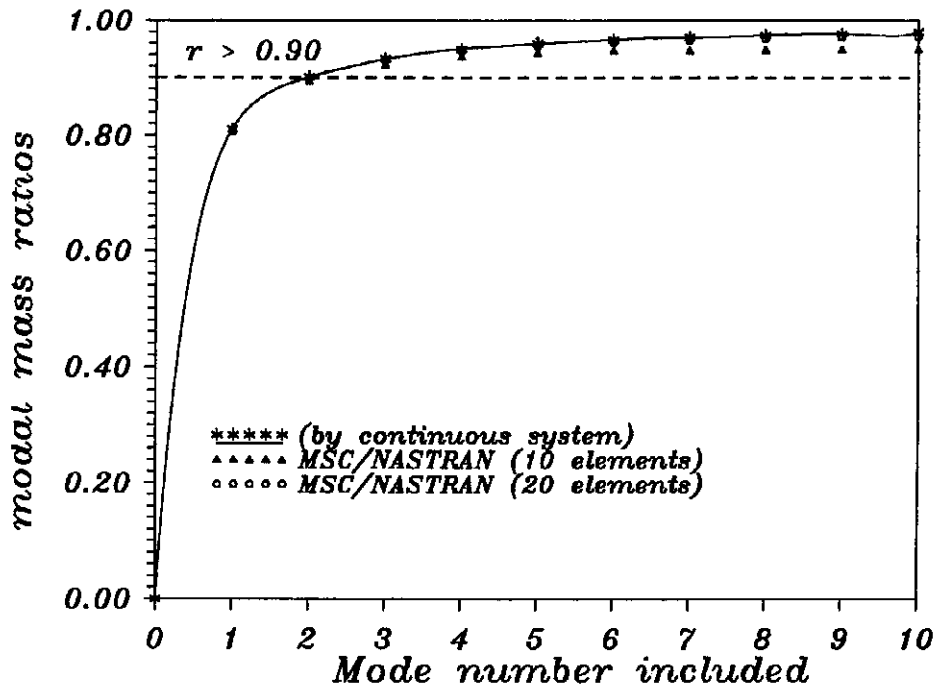
圖四 離散系統中，比較懸臂梁在端點處有無側向彈簧的作用，對基底剪力模態質量比所須之最少模態數的影響



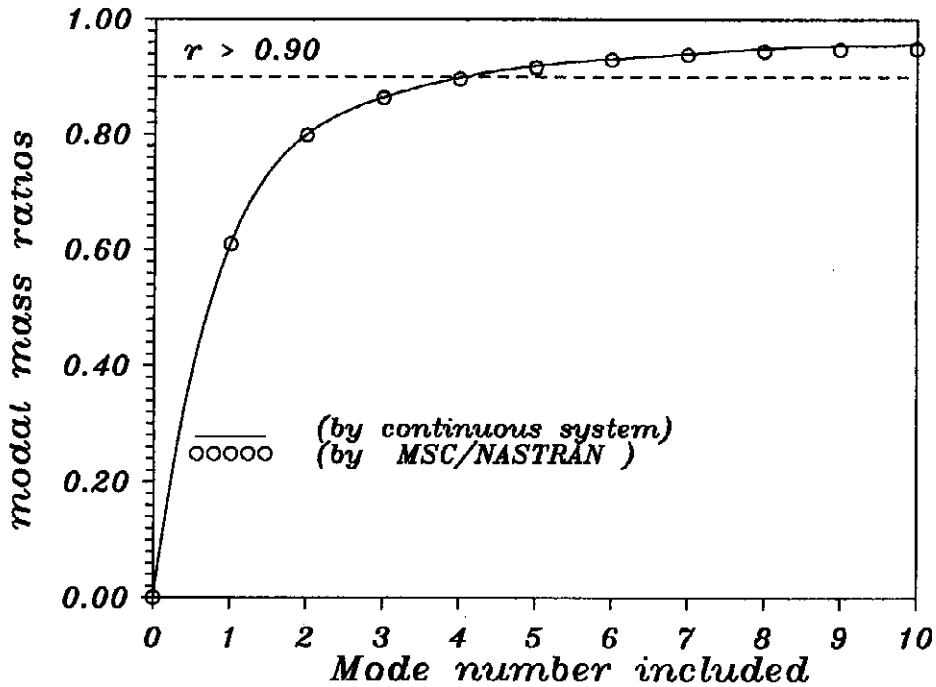
圖五 連續系統中，比較懸臂梁在端點處有無軸向力作用，對基底剪力模態質量比與所須之最少模態數的影響



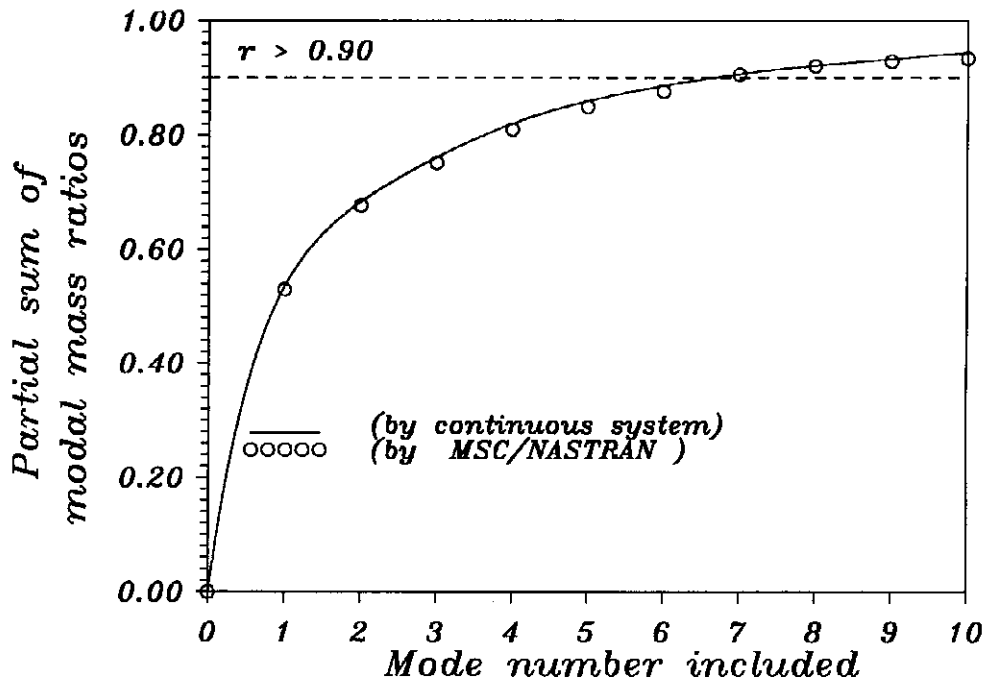
圖六 離散系統中，比較懸臂梁在端點處有無軸向力作用，對基底剪力模態質量比所須之最少模態數的影響



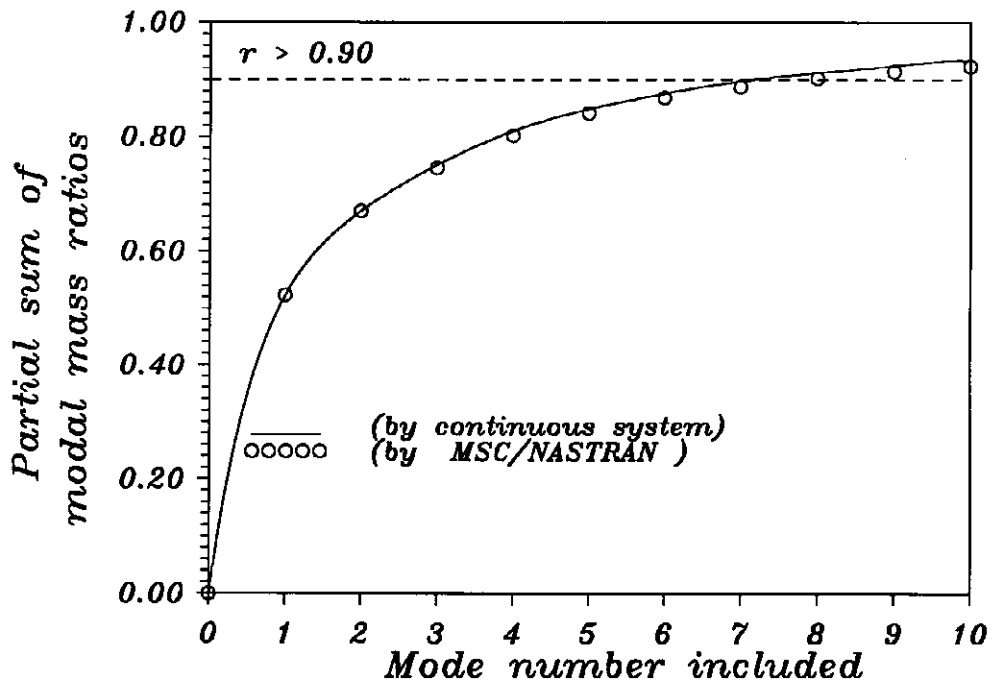
圖七 受支承軸向振動之懸臂樑，在離散系統與連續系統中，兩者基底剪力模態質量比與所須之最少模態數的影響



圖八 受支承橫向振動之懸臂梁，在離散系統與連續系統中，兩者基底剪力模態質量比與所須之最少模態數的影響



圖九 結構圖一.(c)在離散系統與連續系統的基底剪力模態質量比與所須之最少模態數之比較



圖十 結構圖一.(d)在離散系統與連續系統的基底剪力模態質量比與所須之最少模態數之比較

六、結論

本文已成功地將模態反力法由離散系統應用到連續系統，從四個算例中，可說明基底剪力模態質量總和恰等於本文所定義的正規化擬靜態質量，在多支承問題上，不僅提供工程師一個找尋符合規範所須最少模態的新方向，同時具有計算簡潔省時的優點，尤其可貴的是讓支承運動的模態參與係數更具有明確的物理意義，使學者及工程師都將有更明確的認識，所建議滿足UBC規範要求的最少模態數，亦可提供支承運動動力分析與設計的參考。

誌謝

本文第一作者感謝臺大土木系洪宏基教授與葉超雄教授對本研究的諸多寶貴意見與指導。

參考文獻

1. Chen, J.T., Hong, H.-K. and Yen, C.S., "Modal Reaction Method for Modal Participation Factor of Support Motion Problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No 6, pp.479-490 (1995).
2. Chen, J.T., Chyuan, S.W., You, D.W. and Wong, H.T., "A New Method for Determining the Modal Participation Factor in Support Motion Problems Using MSC/NASTRAN", *The Seventh Annual MSC/NASTRAN Users' Conference*, Taipei (1995).
3. 陳正宗，洪宏基，邊界元素法，第2版，新世界出版社，484面，台北(1992)。
4. 陳正宗、林信立、韓文仁、邱垂鈺與秦無忝編著，MSC/NASTRAN 使用入門與工程應用，良宜圖書公司，500面，台北(1989)。
5. Schaeffer, H.G. *MSC/NASTRAN Primer-Static and Normal Modes Analysis*, Third Edition, Schaffer Analysis Inc. (1979).
6. Chen, J.T., Hong, H.-K., Yeh, C.S. and Chyuan, S.W., "Integral Representations and Regularizations for Divergent Series Solution for a Beam Subjected to Multi-Support Motion", to Appear in *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (1995).
7. Chen J. T and Tsaur D. H. , "A New Method for Transient and Random Responses of Structures Subject to Support Motions", Revised Version in *Engineering Structures* (1996).
8. Mindlin, R.D. and Goodman, L.E., "Beam Vibrations with Time-Dependent Boundary Conditions", *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol, 17, pp.377-380 (1950).
9. Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., *Elastodynamics*, Vol. 2, Linear Theory, Academic Press, New York (1975).
10. Chen, J.T., Chyuan, S.W., You, D.W. and Wong, F.C., "Normalized Quasi-Static Mass-A New Definition for Muti-Support Motion Problem", Submitted for publication (1996).
11. Chen, J.T. and Cheng, Y.S., "Dual Series Representation for A String Subjected to Support Motions", *Advances in Engineering Software*, Accepted (1996).
12. Geyer, A., "Multiple Support Excitation

- for NASTRAN Piping Analysis", Proc. MSC/NASTRAN Eur. Users' Conference (1982).
13. Schiavello, D.V. and Sinkewicz, J.E., "DMAP for Determining Modal Participation Factor", Proc. MSC/NASTRAN World Users' Conference (1983).
 14. William, R., Case, A NASTRAN DMAP Procedure for Calculation of Base Excitation Modal Participation Factors, 11th NASTRAN Users' Colloq., pp.113-140 (1983).
 15. Palmieri, F.M., "Example Problems Illustrating The Effect of Multiple Cross Correlated Excitations on The Response of Linear Systems to Guassian Random Excitations", MSC 1988 World Users' Conference, Vol. 1, No. 18 (1988).
 16. Gockl, M.A., Handbbok of Dynamic Analysis, p.3.5-6 ~ p.3.5-11, p.4.5-9 (1983).
 17. Der Kiureghian, A. and Neuenhofer, A., "Response Specturm Method for Multi-Support Seismic Excitations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, pp.713-740 (1992).
 18. Abdel-Ghaffar, A.M. and Rood, J.D., "Simplified Earthquake Analysis of Suspension Bridge Towers", Vol. 108, No. EM2, pp.291-308, ASCE (1982).
 19. Berg, G.V., Elements of Structural Dynamics, Prentice Hall, Engewood Cliffs, New Jersey (1988).
 20. Carr A.J., "Dynamic Analysis of Structures", Bulletin of The New Zealand National Society for Earthquake Engineering, Vol. 27, No.2, June (1994).
 21. Uniform Building Code, p2312, International Conference of Building Officials, Whitter, Calif (1991).