

# 含不完全隔間聲場之對偶邊界元素分析

陳桂鴻 \*

陳正宗 \*\*

劉德源 \*\*

中華民國 台灣省 基隆市  
國立台灣海洋大學  
河海工程學研究所 河海工程學研究所 造船工程學研究所

## 摘要

本文以對偶邊界積分方程式求解聲場之自然聲頻與聲模，並利用影響係數矩陣的行列式直接搜尋法來求解自然聲頻，進而決定對應之自然聲模。於二維含不完全隔間之聲場特性分析時，本文將奇異積分方程 (UT 式) 及超奇異積分方程 (LM 式) 之奇異積分 (singular integral) 與超奇異積分 (hypersingular integral) 轉換成正規積分 (regular integral)，並發展出一套解自然聲頻與聲模的對偶邊界元素程式，藉由此程式可成功地求得任意二維內域含不完全隔間聲場的自然聲頻與聲模，解決傳統邊界元素法於退化邊界所造成聲頻與聲模無法決定的困難。最後，並以實例比較本法和解析解、多倒易法、有限元素法所得的數值結果與實驗資料均相當吻合，驗證了本文方法的可行性。

**關鍵詞：** 超奇異積分、自然聲頻、自然聲模、退化邊界、條件數。

## 一、前言

含不完全隔間的小空間聲場，常被用來降低室內空間的自然聲頻，以避開聲音結構系統的共振問題，其目的有二：一為延長結構使用壽限；另一為改善聲音的品質。前者如消音箱內之隔板；後者如小型錄音間的導音板，皆是含不完全隔間的例子。因此如何準確預測含隔間的聲場自然聲頻也一直為學者所注意。Harris [1] 曾以微擾法解析此問題，Petyt 等 [2,3] 曾以有限元素法分析。在邊界元素法方面，則有大量文獻，從事此方面研究，綜整概括可分成以下幾類：

- (1) 邊界元素與有限元素合成法 (boundary element and finite cell method) [4,5]，
- (2) 以霍姆荷茲 (Helmholtz) 方程基本解為基礎的複數型 (complex-value) 邊界元素法 [6,7]，
- (3) 特解積分的邊界元素法 [8,9]，
- (4) 雙倒易邊界元素法 (dual reciprocity method) [10,11]，
- (5) 多倒易邊界元素法 (multiple reciprocity method, MRM) [12]。

然而以上五種方法，均僅適用於正常邊界問題，亦即當定義域內的聲場空間內含不完全隔間時，若隔間

的厚度相對於室內空間尺寸而言是很小的，如同彈性體內的裂縫是不具厚度的，在數學上便構成了退化邊界的問題；將使導得的代數方程式具有奇異特性，其解變得非常敏感（在隔間厚度極薄情況下），甚至於發生解不唯一的情況（在隔間厚度為零時），而需特別的處理。文獻上的補救方法，有人工邊界法 [13,14]，特殊格林函數法 [15] 等，然而這些方法與邊界元素法的基本精神——“對問題邊界作離散”之理念相違背，因此一直阻礙著邊界元素法在含退化邊界問題上的進展。近年來，陳與洪 [16,17] 所提出的對偶邊界元素法 (dual boundary element method, DBEM)，已成功地應用在一些含退化邊界的邊界值問題上，如含板樁的滲流 [18]、彈性體的裂縫 [19] 與薄翼的氣動力問題 [20] 等，在葡萄牙 [21]、巴西 [22]、比利時 [23] 與國內（如陳 [24]、曹等 [25] 等）均有學者根據洪與陳的對偶積分架構，在各不同領域予以推廣。近幾年，對偶邊界元素法已成功地應用在各個領域。英國 WIT 理工學院更發展一套商用程式 BEASY-CRACK [26] 已應用在歐美的工業界。然而以上的應用，均局限於含裂縫的彈性體之破壞與疲勞等方面的研究。有關含不完全隔間聲場的應用，目前尚未見過。雖然以往在求解外域聲場問題時，Burton 與 Miller [27] 曾

\* 研究生

\*\* 副教授

以對偶積分方程的架構求解，然其動機是為了避開虛擬頻率 (fictitious frequency)，和本研究克服退化邊界問題的動機不同。因此，本文將應用對偶積分方程的理論架構聲場的特徵值問題，以分析含極薄隔間聲場的聲頻與聲模。

## 二、理論推導

### 2.1 聲波對偶積分方程式的推導

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + Q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

其中， $p$  為聲壓， $c$  為聲速， $Q(\mathbf{x}, t)$  為聲源項， $D$  為問題的定義域。若無聲源項，在頻率域的控制方程為

$$\nabla^2 \bar{p}(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \bar{p}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2)$$

其中， $\bar{p}(\mathbf{x}, \omega)$  為  $p(\mathbf{x}, t)$  的 Fourier 轉換， $k$  為波數，其為角頻率除以聲速 ( $k = \omega/c$ )。基本解  $U(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  滿足下式，

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + k^2 U(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \quad (3)$$

其中， $\mathbf{x}$  為場點， $\mathbf{s}$  為源點。為了方便建構對偶積分方程式，吾人定義

$$u(\mathbf{x}) \equiv \bar{p}(\mathbf{x}, \omega)$$

$$t(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \bar{p}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n(\mathbf{x})}$$

由式 (2) 與式 (3) 引入格林第二定理，可得域內點對偶積分式的第一式如下：

$$2\pi u(\mathbf{x}) = \int_B \{T(\mathbf{s}, \mathbf{x}) u(\mathbf{s}) - U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) t(\mathbf{s})\} dB(\mathbf{s}) \quad \mathbf{x} \in D \quad (4)$$

其中， $B$  為積分邊界，將上式之積分方程做法向導微，可得到域內點的對偶邊界積分方程式的第二式如下：

$$2\pi t(\mathbf{x}) = \int_B \{M(\mathbf{s}, \mathbf{x}) u(\mathbf{s}) - L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) t(\mathbf{s})\} dB(\mathbf{s}) \quad \mathbf{x} \in D \quad (5)$$

其中， $t(\mathbf{s}) = \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial n_s}$  為音壓勢位法向導微 (即為速度勢位)， $n_s$  為源點的法向量。當  $\mathbf{x}$  推到平滑邊界，可得邊界點的對偶邊界積分方程式的第一式如下：

$$\pi u(\mathbf{x}) = \text{C.P.V.} \int_B T(\mathbf{s}, \mathbf{x}) u(\mathbf{s}) dB(\mathbf{s}) - \int_B U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) t(\mathbf{s}) dB(\mathbf{s}), \quad \mathbf{x} \in B \quad (6)$$

同理，將法向微分運算子作用到上式後，可得邊界點對偶邊界積分方程式的第二式如下：

$$\pi t(\mathbf{x}) = \text{H.P.V.} \int_B M(\mathbf{s}, \mathbf{x}) u(\mathbf{s}) dB(\mathbf{s}) - \text{C.P.V.} \int_B L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) t(\mathbf{s}) dB(\mathbf{s}), \quad \mathbf{x} \in B \quad (7)$$

其中，C.P.V. 表示柯西主值，H.P.V. 表示阿達馬主值，而  $U(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ， $T(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ， $L(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ， $M(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  分別為對偶積分模式的四個核函數。對偶積分式的四個核函數在二維問題中分別表示為

$$U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{-i\pi H_0^1(kr)}{2} \quad (8)$$

$$T(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{-ik\pi}{2} H_1^1(kr) \frac{y_i n_i}{r} \quad (9)$$

$$L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{ik\pi}{2} H_1^1(kr) \frac{y_i \bar{n}_i}{r} \quad (10)$$

$$M(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{-ik\pi}{2} \left\{ -k \frac{H_2^1(kr)}{r^2} y_i y_j n_i \bar{n}_j + \frac{H_1^1(kr)}{r} n_i \bar{n}_i \right\} \quad (11)$$

其中， $H_n^1(kr)$  表示第一類第  $n$  階 Hankel 函數， $r$  為場點與源點之間的距離， $n_i$  為源點的法向量之第  $i$  個分量， $y_i = s_i - x_i$ ， $\bar{n}_i$  為場點的法向量之第  $i$  個分量。式 (8) 至式 (11) 核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下：

$$U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (12)$$

$$T(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (13)$$

$$M(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (14)$$

### 2.2 對偶邊界積分方程的離散化

由於超奇異核函數對應的密度函數需滿足特定的連續條件 [30~32]，因此線性元素與二次元素並不適用，本文採用常數元素，將對偶邊界積分方程離散化，得到對偶邊界元素法的兩個代數方程式如下：

$$\left[ [T(\lambda)] - 2\pi[I] \right] \{u\} = [U(\lambda)] \{t\} \quad (15)$$

或

$$\left[ [M(\lambda)] \right] \{u\} = \left[ [L(\lambda)] + 2\pi[I] \right] \{t\} \quad (16)$$

其中， $[I]$  為單位矩陣， $\lambda = k^2$ ，且  $[U(\lambda)]$ ， $[T(\lambda)]$ ， $[L(\lambda)]$  與  $[M(\lambda)]$  矩陣分別由  $U$ 、 $T$ 、 $L$  與  $M$  核函數之邊界積分方程中求得。而其元素形式可寫成

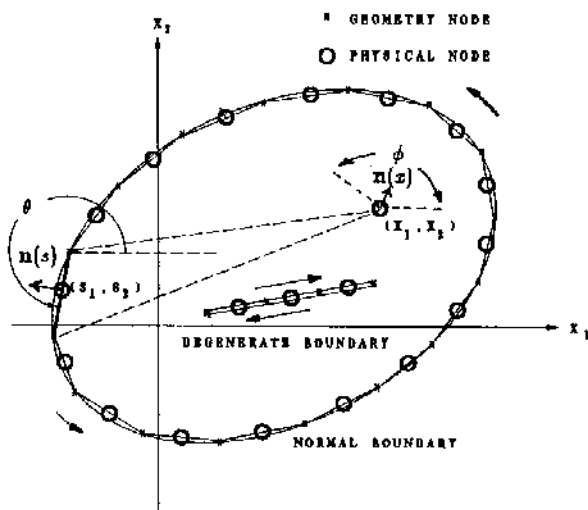
$$U_{pq} = \int_{B_q} U(s_q, x_p) dB(s_q) \quad (17)$$

$$T_{pq} = \int_{B_q} T(s_q, x_p) dB(s_q) \quad (18)$$

$$L_{pq} = \int_{B_q} L(s_q, x_p) dB(s_q) \quad (19)$$

$$M_{pq} = \int_{B_q} M(s_q, x_p) dB(s_q) \quad (20)$$

本文以客觀性觀念 (objectivity point of view) 將核函數的積分純量值轉到一參考座標系統，使計算更系統化，其座標轉換請參考圖 1，其中， $\phi$  與  $\theta$  分別表示場點與源點之法向量所指的角度。四個核函數離散化過程分別說明如下：



$$\text{COLX(NEL)} = \bar{x}_1 \quad \text{COLX(ICOLI)} = \bar{x}_1$$

$$\text{COLY(NEL)} = \bar{x}_2 \quad \text{COLY(ICOLI)} = \bar{x}_2$$

$$\text{XBAR} = \bar{x} - \bar{x}_1 - \bar{s}_1$$

$$\text{YBAR} = \bar{y} - \bar{y}_1 - \bar{s}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \text{XROT} \\ \text{YROT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{XBAR} \\ \text{YBAR} \end{Bmatrix}$$

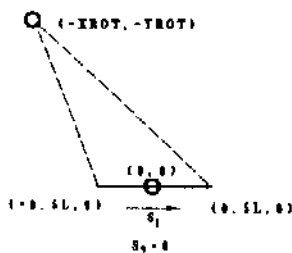


圖 1 客觀性座標轉換示意圖

## (1) $U$ 核函數

### (a) 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即  $x_r \neq 0$  或  $y_r \neq 0$ ，可得

$$U_{pq} = \frac{-i\pi}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_0^1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}) ds \quad (p \neq q) \quad (21)$$

### (b) 弱奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即  $x_r = 0$  與  $y_r = 0$  的情況，其極限過程，令  $x_r = 0$ ， $y_r = \epsilon$ ，求得

$$\begin{aligned} U_{pp} &= \frac{-i\pi}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_0^1(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2}) ds \\ &= \frac{-i\pi}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-0.5l}^{-\sqrt{\epsilon}} H_0^1(k|s|) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} i \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{k}{2} \sqrt{s^2 + \epsilon^2} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{0.5l} H_0^1(ks) ds \right\} \\ &= \frac{-i\pi}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-0.5l}^{-\sqrt{\epsilon}} H_0^1(k|s|) ds + 0 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{0.5l} H_0^1(ks) ds \right\} \\ &= \frac{-i\pi}{2} \left\{ H_0^1 \left( \frac{kl}{2} \right) l + k \int_{-0.5l}^{0.5l} \left\{ H_1^1(k|s|) |s| ds \right\} \right. \\ &\quad \left. (p \text{ no sum}) \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

上式已成功地將弱奇異積分轉換成正規積分，使用高斯積分法處理即可。

## (2) $T$ 核函數

### (a) 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即  $x_r \neq 0$  或  $y_r \neq 0$ ，可得

$$T_{pq} = \frac{i\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}) \frac{y_r}{\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}} ds \quad (p \neq q) \quad (23)$$

### (b) 強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即  $x_r = 0$  與  $y_r = 0$  的情況，其極限過程，令  $x_r = 0$ ， $y_r = \epsilon$ ，求得

$$T_{pp} = \frac{i\pi k}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2}) \frac{\epsilon}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\pi k}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}} \frac{i(-2)}{\pi k \sqrt{s^2 + \epsilon^2}} \frac{\epsilon}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}} ds + \frac{H_1^1(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2})}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}} ds \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{s}{\epsilon} \Big|_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}} \\
&= \pi \quad (p \text{ no sum}) \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i\pi k}{2} \left\{ -2H_1^1\left(\frac{kl}{2}\right) + k \left[ H_0^1\left(\frac{kl}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k \int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k|s|) |s| ds \right] \right\} \quad (p \text{ no sum}) \quad (28)
\end{aligned}$$

### (3) L 核函數

#### (a) 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即  $x_r \neq 0$  或  $y_r \neq 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
L_{pq} &= \frac{i\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}) \\
&\quad \frac{(x_r - s) \sin(\phi - \theta) - y_r \cos(\phi - \theta)}{\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}} ds \\
&\quad (p \neq q) \quad (25)
\end{aligned}$$

#### (b) 強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即  $x_r = 0$  與  $y_r = 0$  的情況，其極限過程，令  $x_r = 0$ ， $y_r = \epsilon$ ，求得

$$\begin{aligned}
L_{pp} &= \frac{i\pi k}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2}) \frac{-\epsilon}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}} ds \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-i\pi k}{2} \int_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}} \frac{i(-2)}{\pi k \sqrt{s^2 + \epsilon^2}} \frac{\epsilon}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}} ds \\
&= -\pi \quad (p \text{ no sum}) \quad (26)
\end{aligned}$$

### (4) M 核函數

#### (a) 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即  $x_r \neq 0$  或  $y_r \neq 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
M_{pq} &= \frac{-i\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} -k \frac{H_2^1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2})}{(x_r - s)^2 + y_r^2} (-y_r) \\
&\quad \{(x_r - s) \sin(\phi - \theta) - y_r \cos(\phi - \theta)\} \\
&\quad + \frac{H_1^1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2})}{\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}} \cos(\phi - \theta) ds \\
&\quad (p \neq q) \quad (27)
\end{aligned}$$

#### (b) 超強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即  $x_r = 0$  與  $y_r = 0$  的情況，其極限過程，令  $x_r = 0$ ， $y_r = \epsilon$ ，求得

$$M_{pp} = \frac{-i\pi k}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} -k \frac{H_2^1(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2})}{s^2 + \epsilon^2} (-\epsilon)(-\epsilon)$$

上式已將超強奇異積分轉換成正規積分，再使用高斯積分法處理即可。

### 2.3 各種邊界條件的特徵方程

代入齊次邊界條件後，可得以下三種不同邊界條件的超越函數的特徵值問題，說明如下：

#### (a) Dirichlet 邊界條件：

具有開窗的邊界或邊界材料為完全軟性的物質如吸音板，即作用在邊界上的聲壓為零 ( $u = 0$ )，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$[U(k)] \{t\} = 0 \quad (29)$$

$$\{ [L(k)] - \pi [I] \} \{t\} = 0 \quad (30)$$

#### (b) Neumann 邊界條件：

邊界材料為完全剛性的物質如混凝土板、鋼板與壓克力板等，即作用在邊界上之音壓的法向導微為零 ( $t = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ )，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$\{ [T(k)] - \pi [I] \} \{u\} = 0 \quad (31)$$

$$[M(k)] \{u\} = 0 \quad (32)$$

#### (c) Robin 邊界條件：

邊界材料為未完全剛性的物質，即作用在邊界上之壓力一部分為邊界表面所吸收，一部分被反射 ( $\alpha u + \beta t = 0$ )，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$\{ \alpha [T(k)] - \pi [I] + \beta [U(k)] \} \{u\} = 0 \quad (33)$$

$$\{ \alpha [M(k)] + \beta [L(k)] - \pi [I] \} \{u\} = 0 \quad (34)$$

最後，再以行列式直接搜尋法來求得其特徵頻率，國內洪與劉 [28] 等使用過此法。這個方法是在每一個頻率求出其相對應的影響係數矩陣的行列式值，予以作圖。再由此圖找出行列式值為零的頻率，即為特徵頻率；但是因邊界積分離散化的過程中所導致的誤差，故其行列式值在數值運算下並不為零，因此一般採用圖中的局部極小值，即認定為特徵頻率。

### 三、對偶邊界積分方程第二式所扮演的角色

對於不含退化邊界問題，對偶邊界積分式中任一式均可求得自然聲頻與聲模，但當定義域含不完全隔間時，造成奇異的影響係數矩陣，會使解產生不唯一的情況，即病態 (ill-posed) 的行為，因而無法決定自然聲頻。此時需合成對偶積分方程的第一式與第二式，這就是陳與洪 [29] 在此研究領域所提出的對偶積分方程架構的精神所在。圖 2(a) 與 2(b) 分別為對偶積分方程第一式與對偶積分方程第二式的影響係數矩陣在不同隔間厚度下的條件數 (condition number)。圖中所示之實線均為單純使用 *UT* 或 *LM* 的結果，虛線則代表對偶方法所做的結果。由圖可知，採用對偶的方法來處理退化邊界問題時，將可有效降低影響係數矩陣的奇異性。

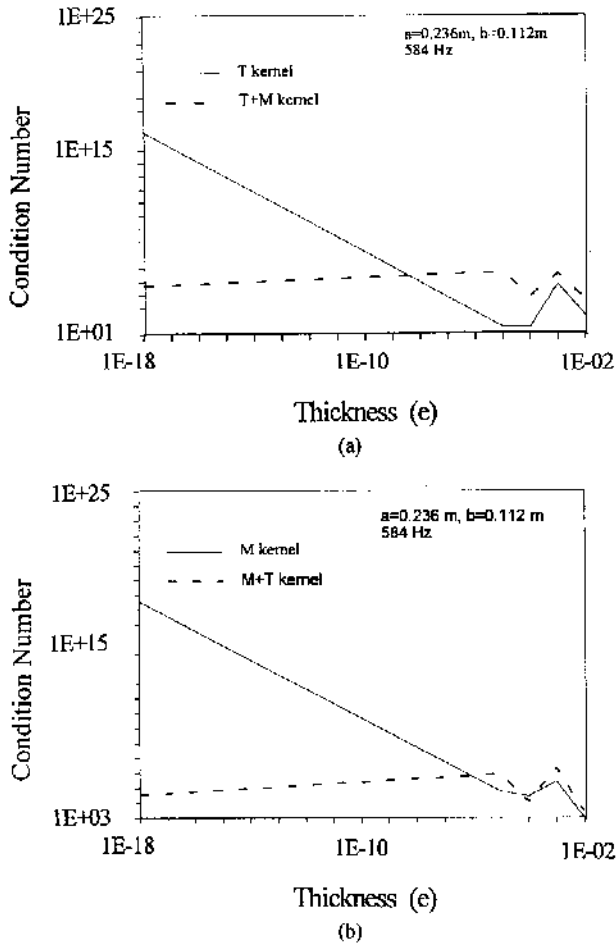


圖 2 不同隔間厚度下的條件數，(a) *UT* 合成 *LM* 法，(b) *LM* 合成 *UT* 法

以第四節算例三而言，若只用對偶積分方程之第一式或第二式來求解，我們獲得圖 3(a) 與 3(b)，因圖為不合理的結果並無法判斷其自然聲頻，當我們使用解決退化邊界的方法後，可得圖 3(c)，從此圖形的局部極小值可判斷出自然聲頻的位置。

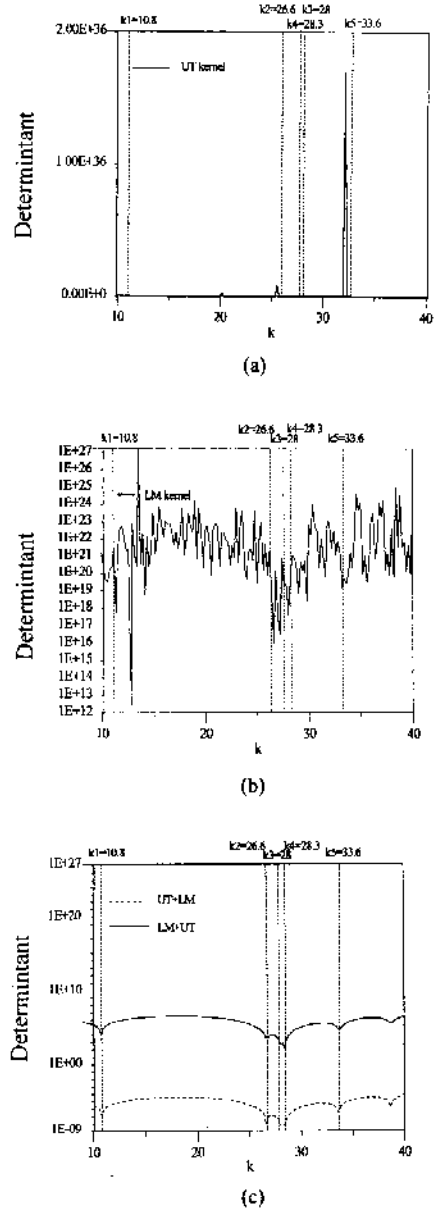


圖 3 極薄隔間厚度 (退化邊界) 的不同聲頻所對應的行列式值，(a) 純 *UT* 法，(b) 純 *LM* 法，(c) *UT* 合成 *LM* 法 (實線)，*LM* 合成 *UT* 法 (虛線)

### 四、實例測試

為了驗證本法的可行性及程式之正確無誤，本節將以三個算例，不含隔間，含不完全有限厚度隔間與極薄隔間來進行數值分析。

#### (1) 算例一 (不含隔間)

圖 4(a) 為聲場空間示意圖，圖 4(b) 為網格分佈圖，其中尺寸大小分別為  $a = 0.236\text{m}$ ， $b = 0.112\text{m}$ ，

$c = 0$ ，其中  $c$  為隔間的長度。考慮 Neumann 邊界條件，可求得解析聲頻、MRM、ABAQUS 程式、實驗結果與本法所求得的根，如表 1 所示；第一聲模頻率隨元素個數增加的收斂圖，如圖 4(c) 所示。圖 5(a) 與 5(b) 為解析聲模的等音壓線圖與三維示意圖，圖 6(a) 與 6(b) 為本法用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖。經與解析解的圖比較後，可知本法所得的結果正確。

表 1 解析聲頻、多倒易法 (MRM)、ABAQUS、實驗結果與本法所得到的根在算例一之數值結果

	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
Exact solution	720.3	1440.7	1517.9	1680.1	2092.7
Present(UT)	720	1442	1517	1680	2096
Present(LM)	720	1453	1517	1701	2096
Dual MRM	721	1444	1520	1689	2004
ABAQUS(AC2D4)	724	1420	1496	1630	1960
ABAQUS(AC2D8)	729	1458	1536	1700	2118
Measurement by Petyt	722	1460	1524	1700	2100

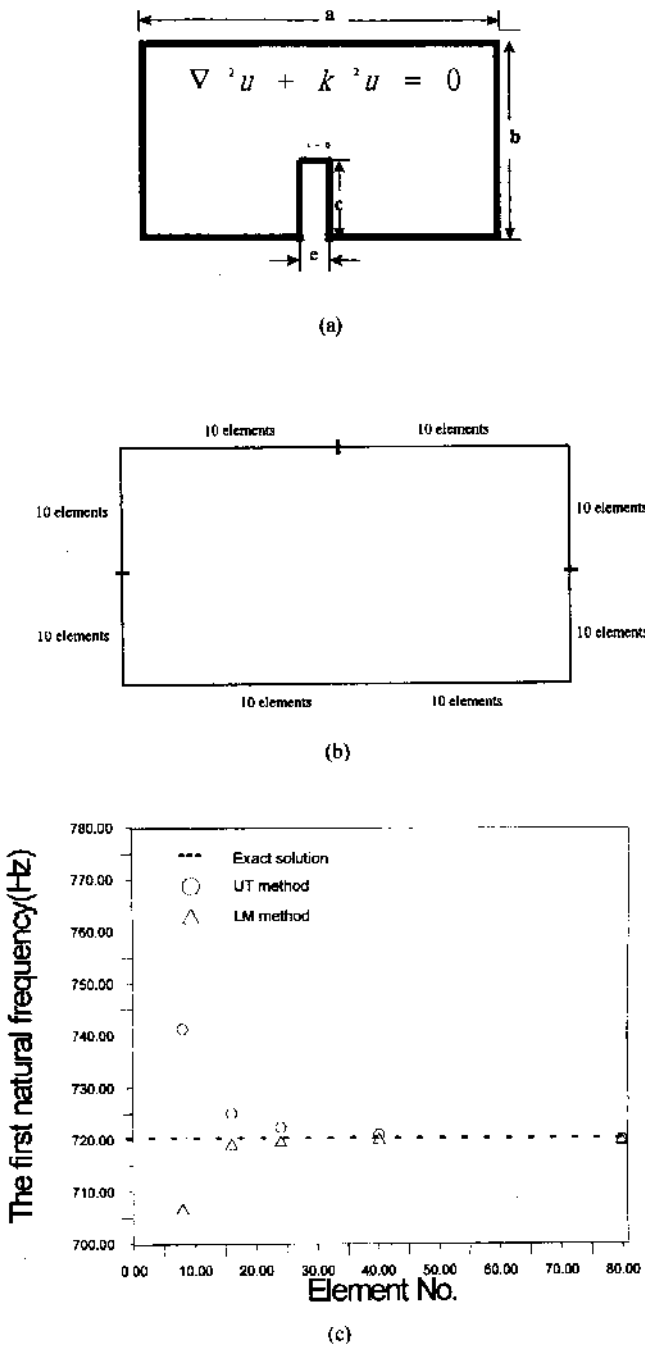


圖 4 (a) 聲場空間示意圖，(b) 邊界元素網格，(c) 第一聲模頻率隨元素個數增加的收斂圖

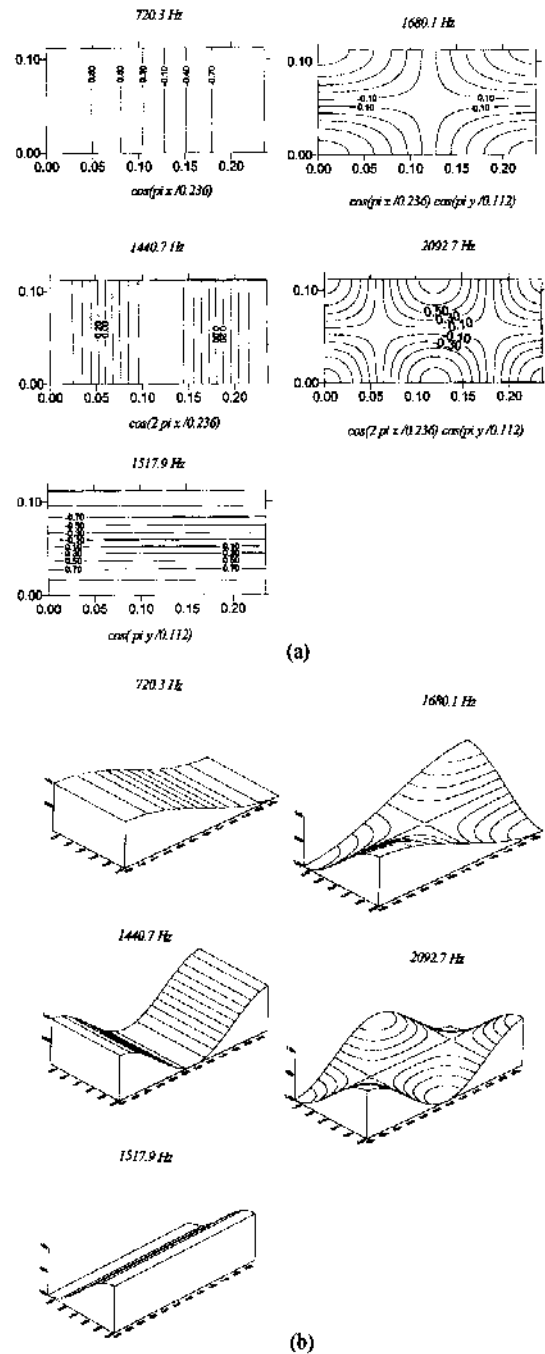


圖 5 算例一之解析聲模，(a) 等高線圖，(b) 三維圖

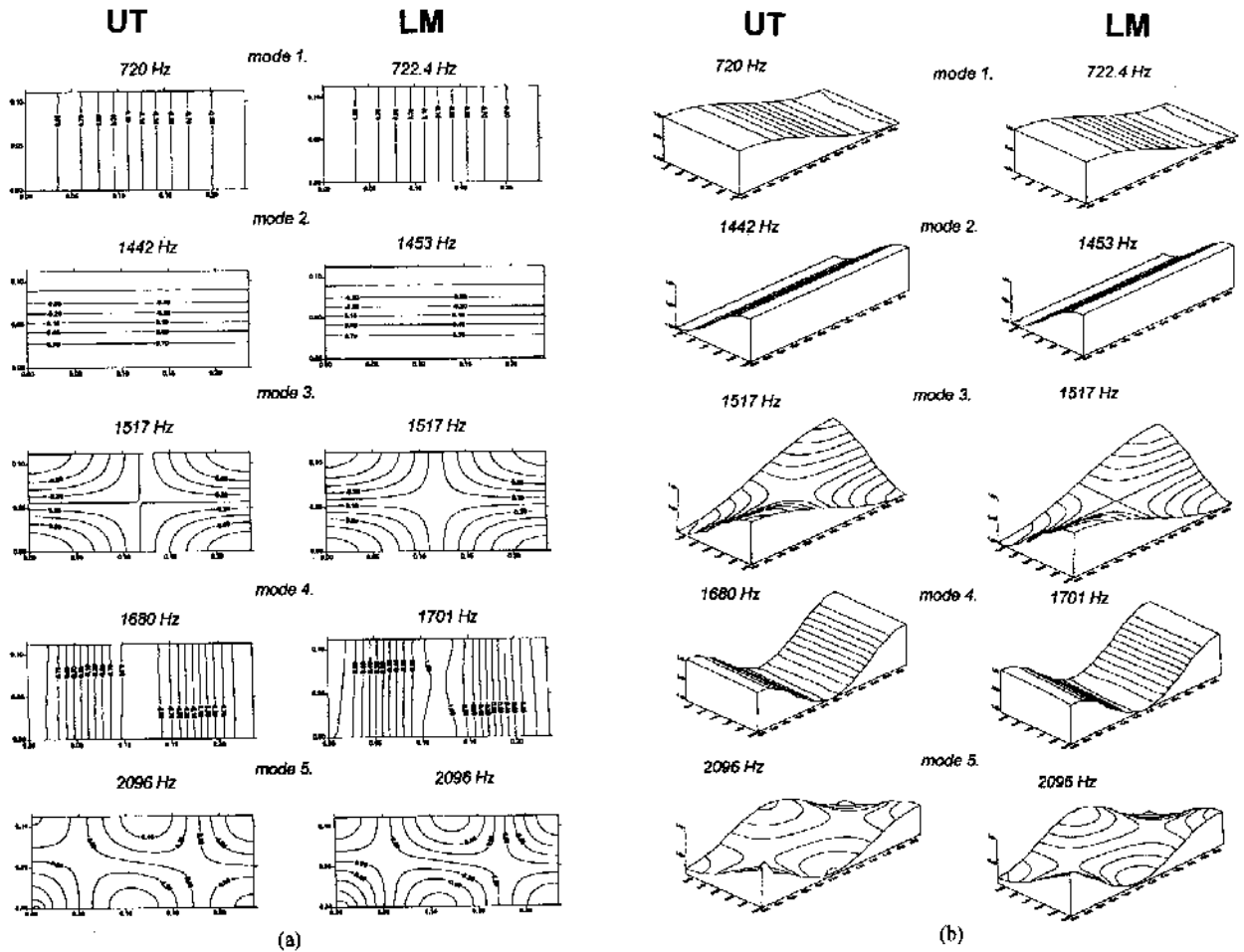


圖 6 算例一用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態 (a) 等高線圖, (b) 三維圖

(2) 算例二 (含薄隔間)

考慮含不完全有限厚度隔間之內域聲場空間, 圖 7(a) 為網格分佈圖, 其中尺寸大小分別為  $a=0.236\text{m}$ ,  $b=0.112\text{m}$ ,  $c=0.056\text{m}$ ,  $e=0.01\text{m}$ , 其中  $e$  為隔間的厚度。考慮 Neumann 邊界條件, 可得 MRM、ABAQUS 程式、實驗結果及本法所求得的根, 如表 2 所示; 圖 7(b) 與 7(c) 為本法用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖, 所得結果均相當吻合。

表 2 多倒易法 (MRM)、ABAQUS、實驗結果與本法所得到的根在算例二之數值結果

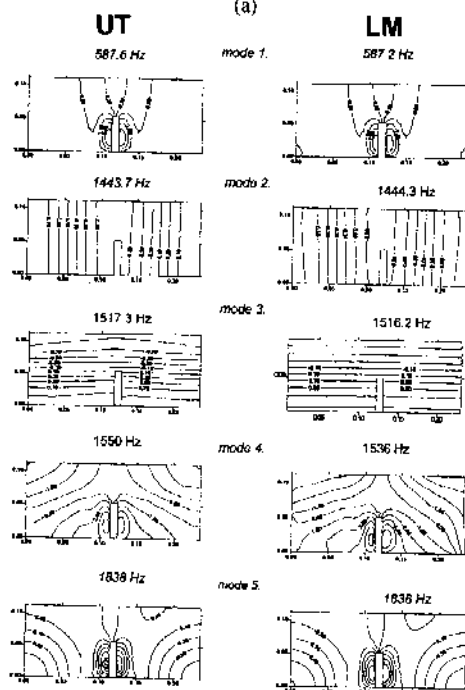
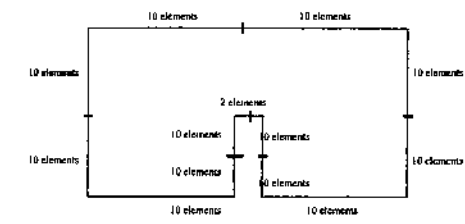
	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
Present (UT)	587.6	1443.7	1517.3	1550	1838
Present (LM)	587.2	1444.3	1516	1536	1838
Dual MRM	555	1472	1528	1566	1718
ABAQUS (AC2D4)	590	1443	1502	1527	1786
ABAQUS (AC2D8)	579	1480	1542	1564	1858
FEM by Petyt	577	1450	1550	1610	1860
Measurement by Petyt	570	1470	1534	1555	1840

(3) 算例三 (含極薄隔間)

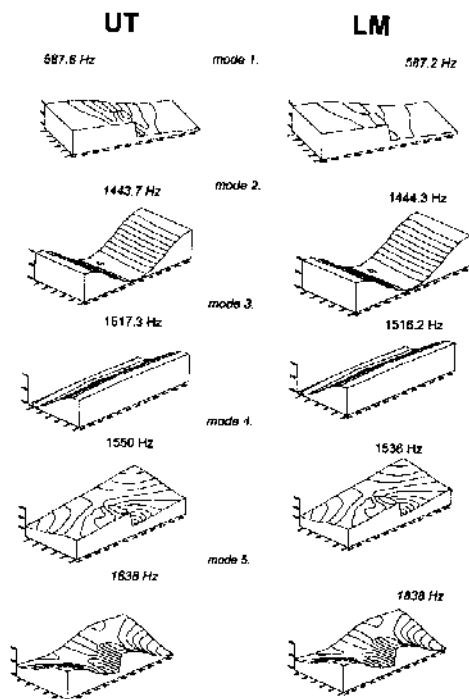
考慮含不完全極薄隔間之內域聲場空間, 圖 8(a) 為網格分佈圖, 其中尺寸大小分別為  $a=0.236\text{m}$ ,  $b=0.112\text{m}$ ,  $c=0.056\text{m}$ ,  $e=0\text{m}$ 。考慮 Neumann 邊界條件, 表 3 為 MRM、ABAQUS 程式、實驗結果、本法所獲得的根之比較; 圖 8(b) 與 8(c) 為本法用對偶積分方程之第一式 (合成第二式) 與第二式 (合成第一式) 所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖, 所得結果均相當吻合。

表 3 多倒易法 (MRM)、ABAQUS、實驗結果與本法所得到的根在算例三之數值結果

	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
Present (UT+LM)	584	1439	1518	1537	1818
Present (LM+UT)	584	1439	1518	1534	1818
Dual MRM	577	1444	1529	1534	NA
ABAQUS (AC2D4)	618	1421	1496	1527	1780
ABAQUS (AC2D8)	605	1458	1536	1563	1851
FEM by Petyt	591	1478	1540	1570	1861
Measurement by Petyt	570	1470	1534	1555	1840

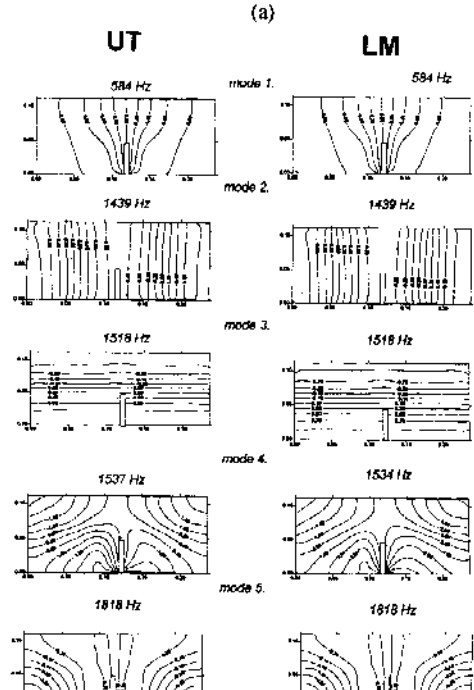
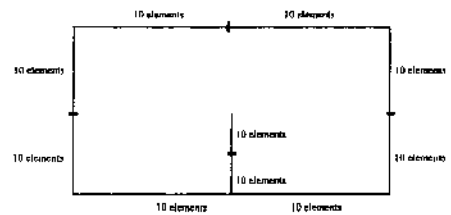


(b)

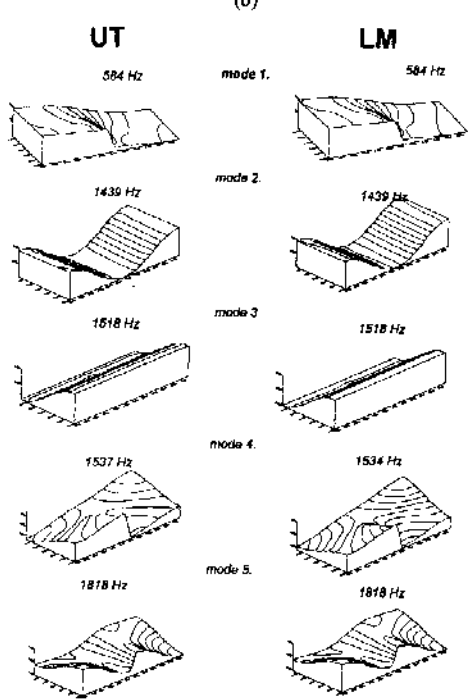


(c)

圖 7 算例二用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態 (a) 邊界元素網格, (b) 等高線圖, (c) 三維圖



(b)



(c)

圖 8 算例三用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態 (a) 邊界元素網格, (b) 等高線圖, (c) 三維圖



(4) 算例四 (含 Dirichlet 條件)

由於算例一至四均為 Neumann 條件的算例，無法驗證  $U_{ij}$  與  $L_{ij}$  的正確性。例四考慮有解析解的 Dirichlet 問題。圖 9 為聲場空間，其中尺寸大小分別為  $a = 1\text{m}$ ， $b = 1\text{m}$ ，且使用四十個等間距元素。圖 10(a)、10(b) 與 10(c) 分別為第一個聲模三維示意圖的解析解、UT 解與 LM 解，而圖 11(a)、11(b) 與 11(c) 分別為第一個聲模等音壓圖的解析解、UT 解與 LM 解。經與解析解比較後，可知本法所得的結果正確。

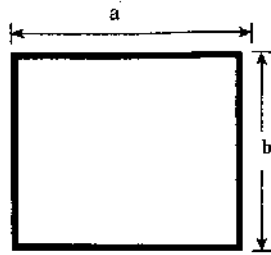


圖 9 算例四之聲場空間示意圖

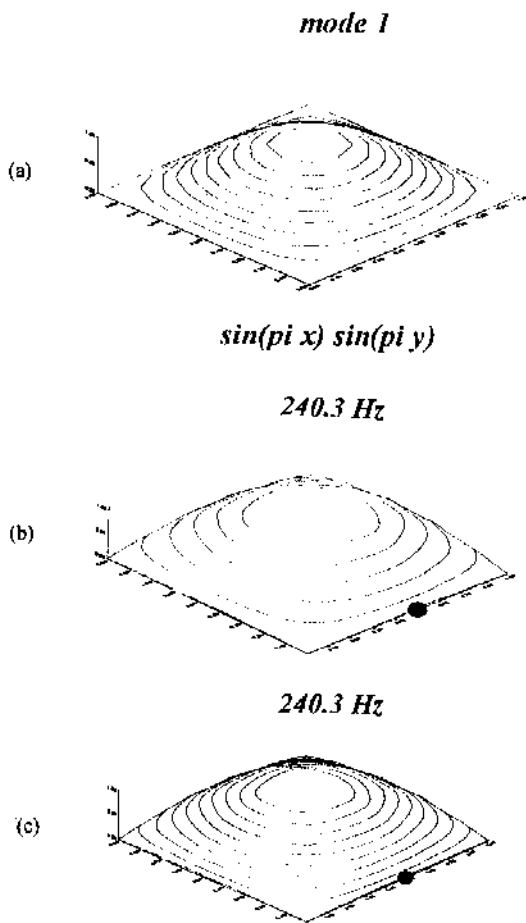
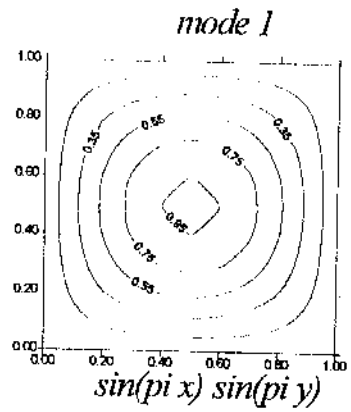
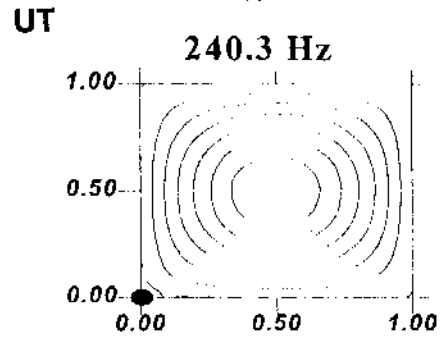


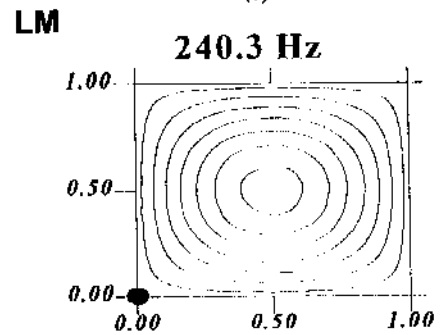
圖 10 第一個聲模音壓三維圖 (a) 解析解，(b) UT 法，(c) LM 法



(a)



(b)



(c)

圖 11 第一個聲模音壓等高線圖 (a) 解析解，(b) UT 法，(c) LM 法

五、結 論

綜合對二維聲場的聲頻與聲模問題分析結果，可得下列幾點的結論：

- (1) 本文已成功地將奇異積分方程 (UT) 及超奇異積分方程 (LM) 之奇異積分 (singular integral) 與超奇異積分 (hypersingular integral) 轉換成正規積分 (regular integral)，並發展一套解聲場空間之自然聲頻與聲模的對偶邊界元素法程式。
- (2) 本文以條件數說明當退化邊界存在時，傳統邊界元素法 (UT 法) 將是病態模式 (ill-posed model)，反映本法第二式不可或缺的角色。

- (3) 本文所提出的對偶邊界元素法可處理內域聲場具退化邊界條件(如含不完全極薄隔間)的特徵頻率問題,亦即解決了傳統邊界元素法於退化邊界所造成自然聲頻與聲模無法決定的困難。

## 誌 謝

本文作者感謝國科會提供研究計劃 NSC-86-2211-E-019-0065 之經費贊助。研究期間,海大河工系葉為忠博士與臺大土木系洪宏基教授的諸多建議,亦一併誌謝。

## 參考文獻

- Harris, C. M. and Feshbach, S., "On the Acoustics of Coupled Room," *J. Acou. Soc. Amer.*, Vol. 22, pp. 572-578 (1950).
- Petyt, M., Koopman, G. H. and Pinnington, R. J., "Acoustic Modes of Rectangular Cavity with a Rigid, Incomplete Partition," *J. Sound and Vibration*, Vol. 53, pp. 71-82 (1977).
- Petyt, M., Lea, J. and Koopman, G. H., "A Finite Element Method for Determining the Acoustic Modes of Irregular Shapes Cavities," *J. Sound and Vibration*, Vol. 45, pp. 495-502 (1976).
- Bezine, G., "A Mixed Boundary Integral-Finite Element Approach to Plate Vibration Problems," *Mech. Res. Commu.*, Vol. 7, pp. 141-150 (1980).
- Liu, S. D. S. and Chen, T.-D., "A BEM-FEM Formulation for Membrane Vibration Analysis," *Boundary Elements XV*, Vol. 2, pp. 407-421, Rencis, J. J. and Brebbia, C. A., eds., Computational Mechanics Publication, Southampton (1993).
- Beskos, D. E., ed., *Boundary Element Method in Mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1987).
- 劉德源, 洪宏基, 「固定海域結構波壓反應頻譜」, 中國造船暨輪機工程期刊, 第十卷第一期, 第 1-13 頁 (1992)。
- Ahmad, S. and Banerjee, P. K., "Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integral," *J. Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 112, pp. 682-695 (1986).
- Banerjee, P. K., Ahmad, S. and Wang, H. C., "A New BEM Formulation for the Acoustic Eigenfrequency Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 1299-1309 (1988).
- Nardini, D. and Brebbia, C. A., "A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements," *Boundary Element Methods in Engineering*, Brebbia, C. A., ed., Springer-Verlag (1982).
- Nardini, D. and Brebbia, C. A., "Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis," *Topics in Boundary Element Research, Vol. 2, Time Dependent and Vibration Problems*, Brebbia, C. A., ed., Springer-Verlag (1985).
- Nowak, A. J. and Neves, A. C., eds., *Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Publ., Southampton (1994).
- Blandford, G. E., Ingraffea, A. R. and Liggett, J. A., "Two Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using Boundary Element Method," *Int. J. Num. Meth.*, Vol. 17, pp. 387-404 (1981).
- Lafe, O. E., Montes, J. S., Cheng, A. H. D., Liggett, J. A. and Liu, P. L-F., "Singularity in Darcy Flow Through Porous Media," *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 106, Hy. 6, pp. 977-997 (1980).
- Snyder, M. D. and Cruse, T. A., "Boundary Integral Equations Analysis of Cracked Anisotropic Plates," *Int. J. Fracture*, Vol. 11, pp. 315-328 (1975).
- Chen, J. T., "On Hadamard Principal Value and Boundary Integral Formulation of Fracture Mechanics," Master Thesis, Institute of Applied Mechanics, National Taiwan University (1986).
- Chen, J. T., "On a Dual Representation Model and Its Applications to Computational Mechanics," Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, National Taiwan University (1994).
- Chen, J. T., Hong, H.-K. and Chyuan, S. W., "Boundary Element Analysis and Design in Seepage Flow Problems with Sheet Piles," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 17, pp. 1-20 (1994).
- Hong, H.-K. and Chen, J. T., "Derivation of Integral Equations in Elasticity," *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 114, No. 6, Em. 5, pp. 1028-1044 (1988).
- Wang, C. S., Chu S. and Chen, J. T., "Boundary Element Method for Predicting Store Airloads During Its Carriage and Separation Procedures," in Grilli, S., Brebbia, C.A., and Cheng, A. H. D., eds., *Computational Engineering with Boundary Elements*, Vol. 1: Fluid and Potential Problems, pp. 305-317 (1990).
- Portela, A., Aliabadi, M. H. and Rooke, D. P.,

## DUAL BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR A ACOUSTIC CAVITY WITH AN INCOMPLETE PARTITION

K. H. Chen\* J. T. Chen\*\*

Dept. of Harbor and River Engineering

D. Y. Liou\*\*\*

Dept. of Naval Architecture Engineering

National Taiwan Ocean University  
Keelung, Taiwan, R.O.C.

### ABSTRACT

In this paper, the dual boundary integral formulation is applied to solve the acoustic modes and frequencies of a two-dimensional cavity with degenerate boundaries. All the improper integrals for the kernel functions (UT in the singular equation and LM in the hypersingular equation) in the dual integral equations are reformulated into regular integrals by integrating by parts and are calculated by the Gaussian quadrature rule. After determining the influence matrix for the four kernel functions, the direct determinant search method is employed to find the acoustic frequencies. A general dual BEM program was developed to solve the nonuniqueness for the problems with degenerate boundary when the traditional BEM was used. To demonstrate the validity of the present formulation, the acoustic frequencies and acoustic modes of the two-dimensional arbitrary cavity with an incomplete partition are determined by the developed dual BEM program. Also, the numerical results are compared with those of the ABAQUS program, FEM by Petyt and the dual multiple reciprocity method. Good agreement between the present formulation and measurements by Petyt is also achieved.

**Keywords :** Hypersingularity, Acoustic frequencies, Acoustic modes, Degenerate boundary, Condition number.

\* Graduate student

\*\* Associate Professor (Corresponding author)

\*\*\* Associate Professor

(Manuscript received July 29, 1997,  
Manuscript revised Oct. 24, 1997,  
Accepted for publication Dec. 15, 1997.)

- "The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 33, pp. 1269-1287 (1992).
22. Sollero, P. and Aliabadi, M. H., "Dual Boundary Element Analysis of Anisotropic Crack Problems," pp. 267-276, *Boundary Elements XVII*, Brebbia, C. A., Kim, S., Osswald, T. A. and Power, H., eds., Comp. Mech. Publ. (1995).
23. Yan, A. M. and Nguyen-Dang, H., "Multiple Cracked Fatigue Crack Growth by BEM", *Computational Mechanics*, Vol. 16, pp. 273-280 (1995).
24. Chen, W. H. and Chen, T. C., "An Efficient Dual Boundary Element Technique for a Two-Dimensional Fracture Problem with Multiple Cracks", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 1739-1756 (1995).
25. 曹登皓, 岳景雲, 周鄂東, 「侵水剛性垂直薄板擋波效果的對偶邊界元素法解析」, 十七屆海洋工程研討會論文集, 中華民國台灣, 第 749-763 頁 (1995)。
26. BEASY-CRACK program, Comp. Mech. Publ. (1994).
27. Burton, A. J. and Miller, G. F., "The Application of Integral Equation Methods to Numerical Solution of Some Exterior Boundary Value Problems", *Proc. R. Soc. London Ser. A*, Vol. 323, pp. 201-210 (1971).
28. 洪宏基, 劉德源, 「邊界元素法解析空間音場自然頻率之探討」, 海洋學院理工學報, 第二十期, 第 27-42 頁 (1986)。
29. 陳正宗, 洪宏基, 「邊界元素法」, 第 2 版, 新世界出版社, 台北, 第 1-484 頁 (1992)。
30. Krishnasamy, G., Rizzo, F. J. and Rudolphi, T. J., "Continuity Requirements for Density Functions in the Boundary Element Method for Linear Elasticity", *Comp. Mech.*, Vol. 9, pp. 267-284 (1994).
31. Sladek, V. and Sladek, J., "Inconsistency of the Regularization of Singular Integrals after Discretization", In *Boundary Element Method XVI*, Brebbia, C. A., ed., CMP, Southampton, pp. 219-235 (1994).
32. Martin, P. A. and Rizzo, F. J., "Hypersingular integrals: How Smooth Must the Density Be?," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 39, pp. 687-704 (1996).