

同心圓環二維 Helmholtz 特徵方程問題真假根探討

郭世榮¹ 陳正宗² 劉孟龍³ 全湘偉⁴

關鍵詞：同心圓環、Helmholtz 方程、特徵值、邊界元素法。

摘 要

本文針對同心圓環之 Helmholtz 特徵值問題，採用實部對偶邊界元素法求得真假特徵值。以離散化系統由邊界元素法中影響係數矩陣循環的特性解析一同心圓環空間聲場真假特徵值發生的機制；在數值解方面，則發展實部對偶邊界元素法程式並配合奇異值分解法萃取真根與過濾假根。最後，比較兩者與有限元素法的結果均相當符合。

A STUDY ON THE TRUE AND SPURIOUS EIGENVALUES FOR THE TWO-DIMENSIONAL HELMHOLTZ EIGENPROBLEM OF AN ANNULAR REGION

Shyh-Rong Kuo Jeng-Tzong Chen Meng-Lung Liou

*Department of Harbor and River Engineering
National Taiwan Ocean University
Keelung, Taiwan 202, R.O.C.*

Shiang-Woei Chyuan

*Chungshan Institute of Science and Technology
Lungtan, Taiwan 325, R.O.C.*

Key Words: annular region, Helmholtz equation, eigenvalue, BEM.

ABSTRACT

In this paper, the real-part dual BEM was employed to solve the Helmholtz eigenproblems of annular domain. The circulant and degenerate kernel were used to study the true and spurious eigensolutions in discrete system for simulating the continuous system. The numerical program of real-part dual BEM was also developed to distinguish the true and spurious eigensolutions by using the singular value decomposition technique. Good agreement can be made.

一、前 言

以往邊界元素法求解 Helmholtz 方程的特徵問題時，大多以複數的基本解處理，為了避免在複數型式下求解，可

將 Helmholtz 方程式中含特徵值項視為 Laplace 方程式之外力源，但是此外力源會導得一體積分項，因而使得在利用邊界元素法求解時，仍需對內域作離散。多倒易法將此體積分轉成一系列的邊界積分 [1~3]。後來 Kamiya [4] 等人

¹ 國立台灣海洋大學河海工程學系教授

² 國立台灣海洋大學河海工程學系教授

³ 國立台灣海洋大學河海工程學系大學部學生

⁴ 中山科學院二所三組副研究員

與葉、陳等人 [5] 發現多倒易法與複數邊界元素法只取實部型式，完全相同。陳等 [6,7] 已成功地發展實部對偶邊界元素法，然其應用均侷限於求解單連通的問題，如圓形 [8] 或正方形 [9] 等。對於多連通問題，張 [10] 曾以對偶邊界元素法配合領域分割技巧解決了假根問題，然需以複數型態計算，為了節省儲存空間及計算效率，僅在實數域處理是個可嘗試的方向。本文利用實部對偶邊界元素法 [11,12]，建立二維同心圓特徵值問題對偶積分推導，此為多連通問題，其假根機制將更為複雜。本文將藉由對偶邊界元素的解析推導與數值計算，求得二維同心圓環聲場的自然頻率與自然模態，並配合奇異值分解技巧，以對偶架構來判定真假特徵解，所得結果並與有限元素法比較。

二、研究方法

2.1 對偶邊界元素法

對於傳統多倒易法或實部邊界元素法求解特徵值問題之假根現象，除了利用對偶架構以殘值技巧過濾外，我們也可以把多倒易法或實部邊界元素法中的奇異方程和超奇異方程結合後再使用奇異值分解法，而更有效的濾除假根 [7,13~16]。本文將以解析方式加以說明多連通問題的假根現象，進而建構一套適用於求解任意二維聲場（單連通或多連通）之聲頻與聲模分析程式。

考慮二維特徵值問題，其控制方程式為：

$$(\nabla^2 + k^2) u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in D \quad (1)$$

其中， k 為波數， u 為場量， D 為定義域。

根據邊界元素法 U 、 T 、 L 與 M 四個核函數的對偶架構，可得邊界點對偶邊界積分方程式 [11,16~19]：

$$\begin{aligned} \pi u(x) &= C.P.V. \int_B T(x, s) u(s) dB(s) \\ &\quad - R.P.V. \int_B U(x, s) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \pi t(x) &= H.P.V. \int_B M(x, s) u(s) dB(s) \\ &\quad - C.P.V. \int_B L(x, s) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $C.P.V.$ 和 $R.P.V.$ 分別表示柯西主值與黎曼主值，而 $H.P.V.$ 為阿達馬主值， B 表示邊界。若僅取核函數的實部，則上二式可重新寫成：

$$\begin{aligned} \pi u(x) &= C.P.V. \int_B T_R(x, s) u(s) dB(s) \\ &\quad - R.P.V. \int_B U_R(x, s) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \pi t(x) &= H.P.V. \int_B M_R(x, s) u(s) dB(s) \\ &\quad - C.P.V. \int_B L_R(x, s) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (5)$$

上二式中，下標 R 表示取複數核函數的實部。為了簡化問題，本文僅探討 Dirichlet 的邊界條件，將上二式積分方程離散化，並採用常數元素，可得 [20]：

$$[U_R(k)] \{t\} = \{0\} \quad (6)$$

$$[L_R(k) + \pi \mathbf{I}] \{t\} = [\bar{L}_R(k)] \{t\} = \{0\} \quad (7)$$

(6)、(7)式為一非線性特徵值問題，不過由於少了虛部的束制條件，將導致假根的現象，所以我們會從(6)式中得到一些特徵值，但並不會同時滿足(7)式，同理我們也會從(7)式得到一些特徵值，他們也不會滿足(6)式，此即為對偶架構殘值技巧的精神。

本文採用奇異值分解法，來判定真假根，我們可以先結合(6)與(7)式，使得：

$$[C(k)]_{2N \times N} \{t\}_{N \times 1} = \{0\} \quad (8)$$

$$\text{其中，} [C(k)]_{2N \times N} = \begin{bmatrix} U_R(k) \\ \bar{L}_R(k) \end{bmatrix}$$

對於真根而言，矩陣 $[C(k)]$ 的秩會由原本的 N 降為 $N-1$ ，因此(8)式可以求得非零解。

一過定矩陣 $[A]_{m \times n}$ ，下標 m 是方程式的數量， n 是未知數的數目，所謂奇異值分解法 (Singular Value Decomposition, S.V.D.) 是把 $[A]_{m \times n}$ 分解成：

$$[A]_{m \times n} = [W]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [V]_{n \times n}^* \quad (9)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \Lambda & 0 \\ M & O & M \\ 0 & \Lambda & \sigma_1 \\ M & O & M \\ 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad m > n \quad (10)$$

其中， $[W]$ 、 $[V]$ 分別表示左酉單位及右酉單位矩陣，“*”表示共軛轉置， σ_n 為第 n 個奇異值，且 $\sigma_n \geq \sigma_{n-1} \geq \dots \geq \sigma_1$ ，當我們有 p 個奇異值等於零時 ($0 \leq p \leq n$)，也就是說矩陣 $[A]$ 的秩將降為 $n-p$ 。對真的特徵值而言，若 $[A]$ 矩陣的秩將降為 $n-p$ 時，即表示此真根重根 p 次，反之若為假根，則矩陣 $[A]$ 的秩仍是 n ，也就是其最小奇異值 σ_1 不為零。

當判斷出是真根之後，若要尋求特徵向量可由 $[V]$ 矩陣對應的柱向量決定。利用 S.V.D 技巧除了有效率地判斷真假根之外，還能決定特徵值的重根數，此方面應用，可參考 [6,7]。

2.2 循環對稱矩陣 - 圓形聲場

現將一圓形邊界等分 $2N$ 段後，則 $[U_R]$ 及 $[L_R]$ 的影響係數矩陣，如圖 1 所示，是一對稱的循環矩陣 (Circulant Matrix)，現將 $[U_R]$ 矩陣表示如下：

$$[U_R] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \Lambda & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & \Lambda & a_{2N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M & M & O & M \\ a_1 & a_2 & \Lambda & a_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中， $a_k = a_{2N-k}$ ， $k = 1, 2, \dots, 2N-1$ ，依據此特性，(11)式可以表示成：

$$[U_R] = a_0 \mathbf{I} + a_1 C_{2N} + a_2 C_{2N}^2 + \Lambda + a_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \quad (12)$$

其中， $[C_{2N}]$ 為最基本的循環矩陣單元，其特性如下：

$$[C_{2N}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ M & M & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[C_{2N}]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ M & M & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N

$$[C_{2N}]^{2N-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ M & M & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_{2N}]^{2N} = \mathbf{I}$$

$$[C_{2N}]^{2N+1} = [C_{2N}]$$

而此循環矩陣 $[C_{2N}]$ 的特徵值 α 為 $\alpha^{2N} = 1$ 的根，即為：

$$\alpha_n = e^{i \frac{2n\pi}{2N}}, \quad n = 0, 1, 2, \Lambda, 2N-1$$

$$\alpha_n = (\alpha_1)^n, \quad \alpha_1 = e^{i \frac{2\pi}{2N}} = e^{i \Delta\theta}, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{2N}$$

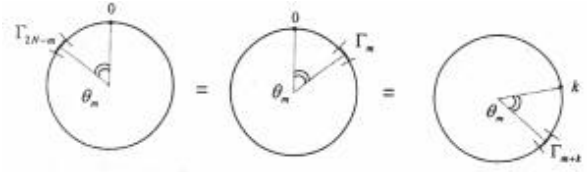


圖 1 影響係數配置點位置與積分邊界的對稱循環示意圖

而 $[C_{2N}]$ 特徵向量 $\{\varphi\}_n$ 可由特徵值 α 表成：

$$\{\varphi_n\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_n \\ \alpha_n^2 \\ \dots \\ M \\ \alpha_n^{2N-1} \end{Bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \Lambda, 2N-1 \quad (14)$$

由循環矩陣特性，可求得 $[U_R]$ 矩陣的特徵值及特徵向量，表示如下：

$$[U_R] = [\mathbf{R}] \cdot [\dot{\mathbf{E}}] \cdot [\mathbf{R}]^T \quad (15)$$

$$[\dot{\mathbf{E}}] = [\mathbf{R}]^T \cdot [U_R] \cdot [\mathbf{R}] \quad (16)$$

式中 $[\Lambda]$ 及 $[R]$ 分別是 $[U_R]$ 矩陣之特徵值及特徵向量所組成，由於 $[U_R]$ 和 $[C_{2N}]$ 的特徵向量是相同。因此可知 $[R]$ 矩陣是由(14)式所組合而成：

$$[R] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \Lambda & \alpha_{2N-1}^1 \\ M & M & O & M \\ \alpha_0^{2N-1} & \alpha_1^{2N-1} & \Lambda & \alpha_{2N-1}^{2N-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

(16)式特徵值矩陣可用來解析真假根。

2.3 單一圓環 Helmholtz 特徵值問題

首先若僅取 Helmholtz 方程的基本解中 U 核函數的實部，可得：

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{\pi}{2} Y_0(kr) = \frac{\pi}{2} Y_0 \left(k \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos\theta} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m(kR) J_m(k\rho) \cos(m\theta), \quad R > \rho \\ &= U_R(\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

式中 R 、 ρ 與 θ 如圖 2 所示，由(12)式循環矩陣理論，可知特徵值是：

$$\begin{aligned} \lambda_l &= a_0 + a_1 \alpha_l + a_2 \alpha_l^2 + \Lambda \Lambda + a_{2N-1} \alpha_l^{2N-1} \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \Lambda, \pm(N-1), N \end{aligned} \quad (19)$$

其中影響係數 a_m 可表示成：

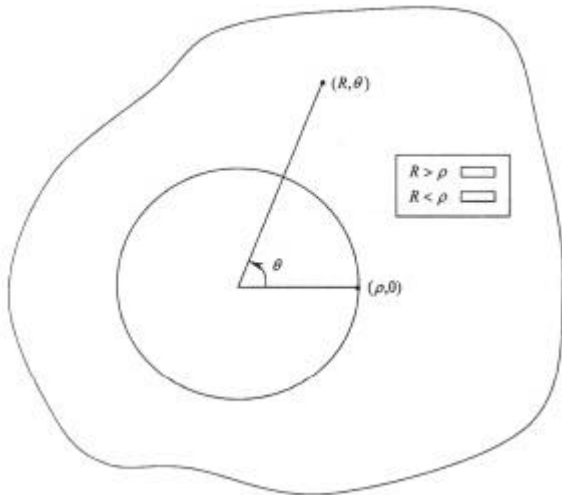


圖 2 R, rho 與 theta 示意圖

$$a_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} U_R(\theta) R d\theta \cong U_R(m\Delta\theta) R \Delta\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (20)$$

$$\lambda_l = a_0 + (-1)^l a_N + \sum_{m=1}^{N-1} (\alpha_l^m + \alpha_l^{2N-m}) a_m = \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\theta) a_m = \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(m(2N-l)\Delta\theta) a_m = \lambda_{2N-l} \quad (21)$$

另外，將(20)式代入(21)式可得：

$$\lambda_l = \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\theta) U_R(m\Delta\theta) R \Delta\theta \quad (22)$$

當 N 趨於無窮大，則由黎曼和轉換成積分，可寫成如下：

$$\lambda_l = \int_0^{2\theta} \cos(l\theta) U_R(\theta) R d\theta = \int_0^{2\theta} \cos(l\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial R} Y_m(kR) J_m(k\rho) \cos(m\theta) R d\theta = \pi^2 R Y_l(kR) J_l(k\rho), \quad l = 0, 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

由上式可知 [U_R] 矩陣的特徵值為 k 的函數。

[U_R] 矩陣行列值為零時，即可求得對應的臨界波數。為了求取 [U_R] 矩陣的行列式值，可先求對角特徵矩陣 [Λ]，再取 [Λ] 的行列式值，其過程如下：

$$\det[U_R] = \det[R] \cdot \det[\ddot{E}] \cdot \det[R]^T$$

由於 [R] 矩陣為一個正交矩陣，所以行列式值為 1，因此：

$$\det[U_R] = 1 \cdot \det[\ddot{E}] \cdot 1 = \det[\ddot{E}] = (\lambda_0 \cdot \lambda_N) \prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2$$

當任一特徵值為零，此行列值亦為零，即是特徵根發生的地方。因此我們可預測單一圓環的根發生在：

$$Y_l(kR) = 0, J_l(k\rho) = 0 \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N, R \geq \rho \quad (25)$$

(25)式是由 U_R 核函數求得，另外取 L_R 核函數，可得：

$$\bar{L}_R = \frac{\pi}{2} \frac{\partial Y_0(kr)}{\partial R} = \frac{\pi}{2} \frac{\partial \{Y_0(k\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos\theta})\}}{\partial R} = \frac{\pi k}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y'_m(kR) J_m(kr) \cos(m\theta), \quad R > \rho = \bar{L}_R(\theta) \quad (26) \quad (27)$$

如同(11)式中的 [U_R] 矩陣，我們亦可求得 L_R 核函數的 [L_R] 矩陣：

$$[\bar{L}_R] = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \Lambda & b_{2N-1} \\ b_{2N-1} & b_0 & \Lambda & b_{2N-2} \\ M & M & O & M \\ b_1 & b_2 & \Lambda & b_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中，

$$b_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} L_R(\theta) R d\theta \cong L_R(m\Delta\theta) R \Delta\theta \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (29)$$

同理，由 L_R 核函數可解析單一圓環的根發生在：

$$Y'_l(kR) = 0, J_l(k\rho) = 0 \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N \quad (30)$$

比較(25)式和(30)式，可以發現相同根為真根，表示如下：

$$J_l(k_T \rho) = 0 \quad (31)$$

而不同的根為假根，說明如下：

$$\text{若使用 } U_R \text{ 核函數，則 } Y_l(k_S R) = 0, R \geq \rho \quad (32)$$

$$\text{若使用 } L_R \text{ 核函數，則 } Y'_l(k_S R) = 0, R \geq \rho \quad (33)$$

2.4 同心圓環之 Helmholtz 特徵值問題

上節是探討單一圓環問題，本節主要是分析一個同心圓環問題。如圖 3 所示，一個同心圓環，其外徑為 a，內徑為 b。同心圓環影響矩陣亦是使用上節相同方法，只是配置點 (source) 如今會在內外圈出現，而邊界亦分內外圈，所以對於同心圓環的問題，可把原先的 [U_R] 矩陣擴充成為：

$$[G] = \begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} \\ U_{ba} & U_{bb} \end{bmatrix} \quad (34)$$

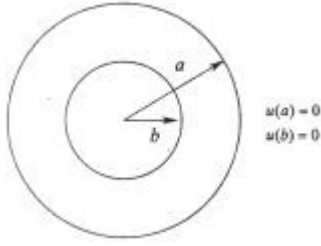


圖 3 Helmholtz 方程的同心圓環問題

如圖 4 所示，上式中 U_{aa} 、 U_{ab} 、 U_{ba} 、 U_{bb} 四個子矩陣的影響係數分別是：

- U_{aa} 的元素表示配置點在外圈點 o 對外圈 Γ_a 做積分。
- U_{ab} 的元素表示配置點在外圈點 o 對內圈 Γ_b 做積分。
- U_{ba} 的元素表示配置點在內圈點 i 對外圈 Γ_a 做積分。
- U_{bb} 的元素表示配置點在內圈點 i 對內圈 Γ_b 做積分。

當我們把內外圓邊界各分為 $2N$ 段時， $[G]$ 矩陣會是一個 $4N \times 4N$ 的矩陣。其中 U_{aa} 、 U_{ab} 、 U_{ba} 與 U_{bb} 是一循環對稱矩陣。如同單一圓環對角化的方法，首先令矩陣 $[\Phi]$ 為：

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

上式矩陣 $[R]$ 定義在(17)式，則：

$$[G] = [\Phi] [\bar{\Lambda}] [\Phi]^T$$

$$[\bar{\Lambda}] = [\Phi]^T [G] [\Phi] = \begin{bmatrix} R^T U_{aa} R & R^T U_{ab} R \\ R^T U_{ba} R & R^T U_{bb} R \end{bmatrix} \quad (35)$$

因為 U_{aa} 、 U_{ab} 、 U_{ba} 與 U_{bb} 都是循環對稱矩陣，所以上式可分別對角化後表示成：

$$[\bar{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \varepsilon_1 & \\ & O & & O \\ & & \mu_{2N} & \varepsilon_{2N} \\ \delta_1 & & & \gamma_1 \\ & O & & O \\ & & \delta_{2N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix}_{4N \times 4N} \quad (36)$$

同心圓環矩陣 $[G]$ 的真假根與行列式值有關。如同(25)式一樣的方法，可以分別求得(36)式 $[\bar{\Lambda}]$ 中四個小矩陣的特徵值：

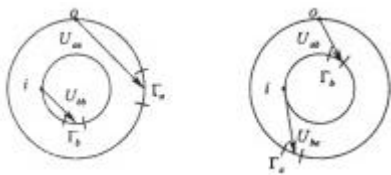


圖 4 子矩陣元素配置點位置與積分邊界的關係

$$\begin{aligned} \mu_l &= \pi^2 a Y_l(ka) J_l(ka) \\ \varepsilon_l &= \pi^2 b Y_l(ka) J_l(kb) \\ \delta_l &= \pi^2 a Y_l(ka) J_l(kb) \\ \gamma_l &= \pi^2 b Y_l(kb) J_l(kb) \end{aligned} \quad (37)$$

因此，同心圓環 $[G]$ 的行列式值為：

$$\det[G] = \det[\Phi] \cdot \det[\bar{\Lambda}] \cdot \det[\Phi]^T = 1 \cdot \det[\bar{\Lambda}] \cdot 1 = \det[\bar{\Lambda}]$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} \mu_1 & & \varepsilon_1 & \\ & O & & O \\ & & \mu_{2N} & \varepsilon_{2N} \\ \delta_1 & & & \gamma_1 \\ & O & & O \\ & & \delta_{2N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix}_{4N \times 4N} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \varepsilon_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \mu_2 & & \varepsilon_2 & \\ & O & & O \\ & & \mu_{2N} & \varepsilon_{2N} \\ \delta_2 & & & \gamma_2 \\ & O & & O \\ & & \delta_{2N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix}_{4N-2 \times 4N-2} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \varepsilon_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \mu_2 & \varepsilon_2 \\ \delta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \det \begin{bmatrix} \mu_3 & & \varepsilon_3 & \\ & O & & O \\ & & \mu_{2N} & \varepsilon_{2N} \\ \delta_3 & & & \gamma_3 \\ & O & & O \\ & & \delta_{2N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix}_{4N-4 \times 4N-4} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \varepsilon_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \mu_2 & \varepsilon_2 \\ \delta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \Lambda \det \begin{bmatrix} \mu_{2N} & \varepsilon_{2N} \\ \delta_{2N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix} \\ &= \prod_{m=1}^{2N} \det \begin{bmatrix} \mu_m & \varepsilon_m \\ \delta_m & \gamma_m \end{bmatrix} = \prod_{m=1}^{2N} \det[\Omega_m] \end{aligned} \quad (38)$$

上式中 $[\Omega_m] = \begin{bmatrix} \mu_m & \varepsilon_m \\ \delta_m & \gamma_m \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det[\Omega_l] &= \begin{vmatrix} \pi^2 a Y_l(ka) J_l(ka) & \pi^2 b Y_l(ka) J_l(kb) \\ \pi^2 a Y_l(ka) J_l(kb) & \pi^2 b Y_l(kb) J_l(kb) \end{vmatrix} \\ &= (\delta^2)^2 ab \begin{vmatrix} Y_l(ka) J_l(ka) & Y_l(ka) J_l(kb) \\ Y_l(ka) J_l(kb) & Y_l(kb) J_l(kb) \end{vmatrix} \\ &= (\delta^2)^2 ab Y_l(ka) J_l(kb) \begin{bmatrix} J_l(ka) & J_l(kb) \\ Y_l(ka) & Y_l(kb) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

如同前節所述，同心圓環問題的真假根也是取 [G] 行列式值為零時的根。因此當我們對(39)式取行列式值，可得特徵方程為：

$$Y_l(ka) = 0, J_l(kb) = 0, J_l(ka)Y_l(kb) - J_l(kb)Y_l(ka) = 0$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

另外從 L_R 核函數亦可求得對應四個小矩陣的特徵值為：

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_l &= \pi^2 k a Y_l'(ka) J_l(ka) \\ \bar{\epsilon}_l &= \pi^2 k b Y_l'(kb) J_l(kb) \\ \bar{\delta}_l &= \pi^2 k a Y_l(ka) J_l'(kb) \\ \bar{\gamma}_l &= \pi^2 k b Y_l(kb) J_l'(ka) \end{aligned} \quad (41)$$

同理，對(41)式所組成的矩陣取行列式值，可得特徵方程為：

$$Y_l'(ka) = 0, J_l'(kb) = 0, J_l(ka)Y_l(kb) - J_l(kb)Y_l(ka) = 0$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, N \quad (42)$$

比較(40)式和(42)式的結果，相同的根為真根 k_T 發生在：

$$J_l(k_T a) Y_l(k_T b) - J_l(k_T b) Y_l(k_T a) = 0 \quad (43)$$

不同的根為假根，若用 U_R 核函數，則假根 k_S 發生在：

$$Y_l(k_S a) = 0, J_l(k_S b) = 0 \quad (44)$$

若用 L_R 核函數，則假根 k_S 發生在：

$$Y_l'(k_S a) = 0, J_l'(k_S b) = 0 \quad (45)$$

三、實例分析

考慮一同心圓環，當我們選取外徑是 $a = 1$ ，內徑是 $b = 0.2$ ，此時的解析解的真根及假根分別列於表 1、表 2 與表 3，表內 k_T 表真根， k_S 表假根。而數值解求得的真假根如圖 5 與圖 6 所示，圖中縱軸 σ_1 表最小奇異值，橫軸 k 表波數， T 與 S 分別表示真假根，而括號內即是真假根的數值解。解析解和數值解的真根比較，列成表 4 所示。由表中可發現若能同時滿足奇異方程及超奇異方程的真根，即為一真根，而其他的根為假根。對於 Helmholtz 方程之真假根的預測，由實例分析驗證數值解與理論解析的結果，相當接近。

結合奇異方程與超奇異方程表示成(8)式，由奇異值分解法 (Singular Value Decomposition, S.V.D.) 的數值技巧所萃取真根，其結果如圖 7 所示。表 4 為解析解、數值解，及由奇異值分解法求得的真根值，三者相互對應。顯示出所預測的真根正確無誤。

最後圖 8 是比較解析解、邊界元素法與有限元素法在各種特徵值時所對應的模態，由圖中可知，此三種方法所得的模態皆相同。

表 1 結合 $[U_R]$ 、 $[\bar{L}_R]$ 矩陣對應的解析真根

	真根 (k_T)	
	$J_n(k_T a) Y_n(k_T b) - J_n(k_T b) Y_n(k_T a) = 0$	
	第一個根	第二個根
$n = 0$	3.82	7.79
$n = 1$	4.24	8.06
$n = 2$	5.22	8.80
$n = 3$	6.39	9.87
$n = 4$	7.59	11.09
$n = 5$	8.77	12.34

其中， k_T 為真根。

表 2 使用 $[U_R]$ 矩陣對應的解析假根

	假根 (k_S)		
	$J_n(k_S b) = 0$	$Y_n(k_S a) = 0$	
	第一個根	第一個根	第二個根
$n = 0$	12.02	0.89	3.96
$n = 1$	19.16	2.20	5.43
$n = 2$	25.68	3.38	6.79
$n = 3$	31.90	4.53	8.10
$n = 4$	37.94	6.65	9.36
$n = 5$	43.86	6.76	10.60

其中， k_S 為假根。

表 3 使用 $[\bar{L}_R]$ 矩陣對應的解析假根

	假根 (k_S)		
	$J_n'(k_S b) = 0$	$Y_n'(k_S a) = 0$	
	第一個根	第一個根	第二個根
$n = 0$	19.16	2.20	5.43
$n = 1$	19.21	3.68	6.94
$n = 2$	15.27	5.00	8.35
$n = 3$	21.01	6.25	9.70
$n = 4$	26.59	7.46	11.01
$n = 5$	32.08	8.65	12.28

其中， k_S 為假根。

表 4 解析解、 $[U_R]$ 、 $[\bar{L}_R]$ 及 S.V.D. 數值解之真假根比較

	第一個根	第二個根	第三個根	第四個根
	真根			
解析解	3.82	4.24	5.22	6.39
$[U_R]$ 法	3.82 (0.0)	4.24 (0.0)	5.22 (0.0)	6.39 (0.0)
$[\bar{L}_R]$ 法	3.93 (0.3)	4.30 (1.4)	5.35 (2.5)	6.49 (1.6)
S.V.D. 法	3.88 (1.6)	4.26 (0.5)	5.29 (1.3)	6.47 (1.3)
	假根			
解析解	0.89	2.20	3.38	3.96
$[U_R]$ 法	0.90 (1.1)	2.21 (0.5)	3.41 (0.9)	3.99 (0.8)
解析解	3.82	4.24	5.22	6.39
$[\bar{L}_R]$ 法	3.93 (2.9)	4.30 (1.4)	5.35 (2.5)	6.49 (1.6)

註：括弧內表誤差百分比

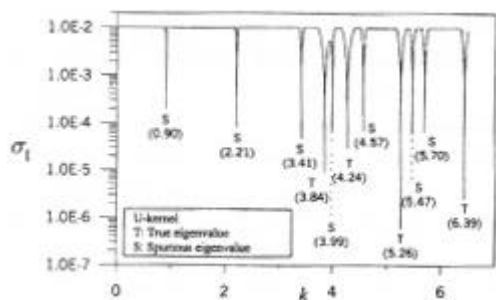


圖 5 最小奇異值對 k 之關係
(使用 $[U_R]$ 法, $a = 1.0, b = 0.2$)

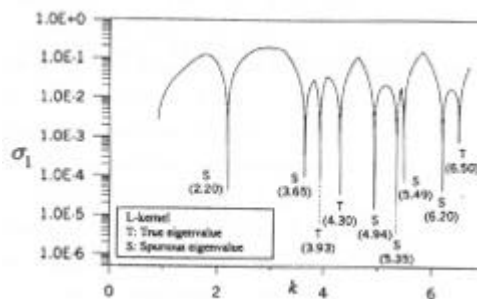


圖 6 最小奇異值對 k 之關係
(使用 $[\bar{L}_R]$ 法, $a = 1.0, b = 0.2$)

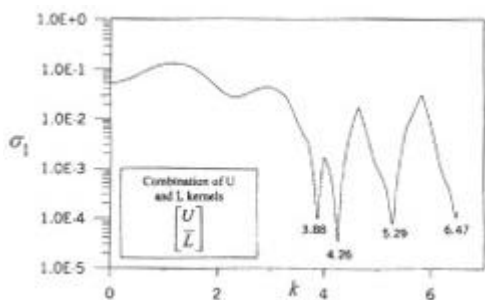


圖 7 最小奇異值對 k 之關係
(使用 S.V.D. 法, $a = 1.0, b = 0.2$)

四、結 論

本文解析導得實部對偶邊界元素法求解同心圓環之 Helmholtz 問題的真假特徵值。除了在離散系統，利用循環對稱矩陣的特性，解析探討真假特徵值的發生機制；並與邊界元素的數值分析求得一致的結果。本文同時藉由對偶架構的奇異與超奇異積分方程式，相同是真根，相異為假根的特性，配合奇異值分解技巧萃取真根。本文雖僅舉 Dirichlet 問題為例，然本法之通用性，可推廣到 Neumann 問題。不同的是，需將原先的 U、L 核函數，改成 T、M 核函數，即可類推。

誌 謝

本文前三位作者特別感謝國家科學委員會大學生研究計畫：「含孔洞二維 Helmholtz 方程特徵值問題真假根探討」(編號：NSC-88-2815-C-019-004-E) 之補助。

參考文獻

1. Nowak, A.J., and Neves, A.C., eds. *Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Publ., Southampton (1994).
2. Chen, J.T., and Wong F.C., "Analytical derivations for one-dimensional eigenproblems using dual BEM and MRM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 20, No. 1, pp. 25-33 (1997).
3. Chen, J.T., and Wong, F.C., "Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 1, pp. 75-95 (1998).
4. Kamiya, N., Andoh, E., and Nogae, K., "A new complex-valued formulation and eigenvalue analysis of the Helmholtz equation by boundary element method," *Advances in Engineering Software*, 26, pp. 219-227 (1996).
5. Yeh, W., Chen, J.T., Chen, K.H., and Wong, F.C., "A study on the multiple reciprocity method and

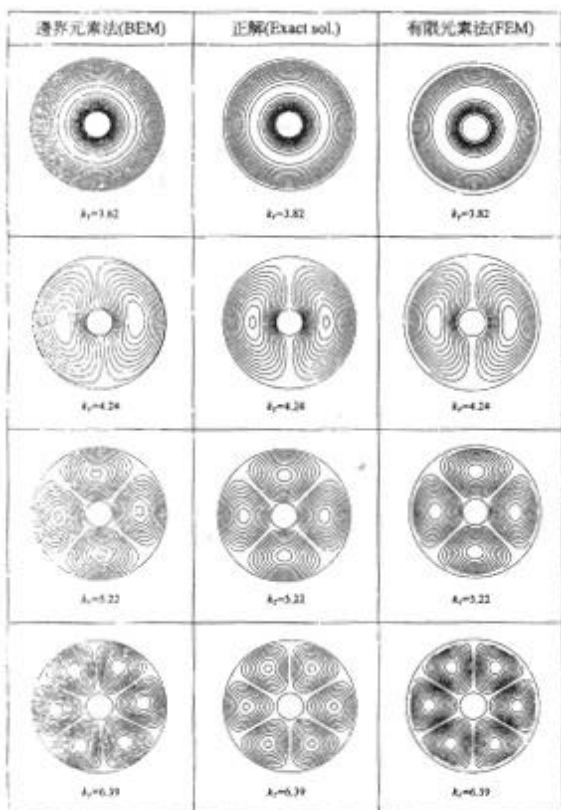


圖 8 前四個模態圖 (含解析解、邊界元素法與有限元素法)

- complex-valued formulation for the Helmholtz equation,” *Advances in Engineering Software*, Vol. 29, No. 1, pp. 7–12 (1997).
6. Chen, J.T., Huang, C.X., and Wong, F.C., “Determination of spurious eigenvalues and multiplicities of true eigenvalues in the dual multiple reciprocity method using the singular value decomposition technique,” *J. Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2, pp. 203–219 (1999).
 7. Chen, J.T., Huang, C.X., and Chen, K.H., “Determination of spurious eigenvalues and multiplicities of true eigenvalues using the real-part dual BEM,” *Computational Mechanics*, 23, Vol. 24, No. 1, pp. 41–51 (1999).
 8. Chen, J.T., Chen, K.H., and Chyuan, S.W., “Numerical experiments for acoustic modes of a square cavity using dual BEM,” *Applied Acoustics*, Vol. 57, No. 4, pp. 293–325 (1998).
 9. Chen, J.T., Huang, C.S., and Wong, F.C., “Analysis and experiment for acoustic modes of a cavity containing an incomplete partition,” *Proceedings of the Fourth National Conference on Structural Engineering*, Vol. 1, pp. 349–356 (1998).
 10. Chang, J.R., “Application of domain partitioning on vibration programs using the dual BEM,” PhD. Dissertation, Institute of Harbor and River Engineering, National Taiwan Ocean University, Keelung, Taiwan (1999).
 11. 陳正宗、洪宏碁, 「邊界元素法」, 新世界出版社, 台北 (1992)。
 12. Chen, J.T., and Hong, H.-K., “Review of dual boundary element method with emphasis on hypersingular integrals and divergent series,” *Applied Mechanics Reviews, ASME*, Vol. 52, No. 1, pp. 17–33 (1999).
 13. Yeih, W., Chen, J.T., and Chang C.M., “Applications of dual MRM for determining the natural frequencies and natural modes of an Euler-Bernoulli beam using the singular value decomposition method,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 23, No. 4, pp. 339–360 (1998).
 14. Yeih, W., Chang, C.M., Chang, J.R., and Chen, J.T., “Applications of dual MRM for determining the natural frequencies and natural modes of a rod using the singular value decomposition method,” *Advances in Engineering Software*, Vol. 30, No. 7, pp. 459–468 (1999).
 15. Kuo, S.R., Chen, J.T., and Huang, C.X., “Analytical study and numerical experiments for true and spurious eigensolutions of a circular cavity using the real-part dual BEM,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, No. 9, pp. 1401–1422 (2000).
 16. Chen, J.T., “Recent Development of Dual BEM in Acoustic Problems,” Keynote lecture, *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics*, Onate, E. and Idelsohn, S.R. eds., Argentina, p. 106 (1998).
 17. 陳桂鴻、陳正宗、劉德源, 「含不完全隔間聲場之對偶邊界元素法分析」, 力學期刊, 第十四卷, 第二期, 第 1–11 頁 (1998)。
 18. Chen, J.T., and Chen, K.H., “Dual integral formulation for determining the acoustic modes of a two-dimensional cavity with a degenerate boundary,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 21, No. 2, pp. 105–116 (1998).
 19. Wylie, C.R., and Barrett, L.C., “Advanced Engineering Mathematics,” McGraw-Hill, 6th ed., New York (1995).
 20. 劉德源、陳正宗、陳桂鴻, 「二維聲場聲模之邊界積分方程新解法」, 中國土木水利工程學刊, 第十一卷, 第二期, 第 299–310 頁 (1999)。

88 年 11 月 30 日	收稿
89 年 4 月 10 日	修改
89 年 5 月 23 日	接受