

二維聲場聲模之邊界積分方程新解法

劉德源¹ 陳正宗² 陳桂鴻³

關鍵詞：對偶積分方程、退化邊界、聲模。

摘 要

本文僅取對偶邊界積分方程式之奇異積分方程 (UT 式) 與超奇異積分方程 (LM 式) 中核函數的實部，即可成功地求得任意二維內域含不完全隔間聲場的自然聲頻與聲模，並可解決傳統邊界元素法於退化邊界所造成聲頻與聲模無法決定的困難。本法具有多倒易法 (MRM) 只在實部求解的優點，又可免除多倒易法繁瑣的疊代過程，利用影響係數矩陣的行列式直接搜尋法來求解自然聲頻，進而決定對應之自然聲模。文中導得的核函數的實部，經級數展開後和多倒易法所得的核函數僅差一個複數常數，因此本文亦會產生假根的問題。文中利用超奇異積分式提出三種過濾假根的方法。並以三個實例比較本法和解析解、多倒易法、有限元素法所得的數值結果與實驗資料均相當吻合，驗證了本文方法的可行性。

A NEW METHOD FOR DETERMINING THE ACOUSTIC MODES OF A TWO-DIMENSIONAL SOUND FIELD

Der-Yuan Liou

Jeng-Tzong Chen

Kue-Hong Chen

*Department of System Engineering and Naval Architecture
National Taiwan Ocean University
Keelung, Taiwan 20224, R.O.C.*

*Department of Harbor and River Engineering
National Taiwan Ocean University
Keelung, Taiwan 20224, R.O.C.*

Key Words: dual integral equation, degenerate boundary, acoustic mode.

ABSTRACT

In this paper, the real parts of the kernels in the singular integral equation (UT kernel function) and the hypersingular integral equation (LM kernel function) of the dual integral formulation are used to solve the acoustic natural modes and frequencies of a two-dimensional sound field with an incomplete partition. Also, the degenerate boundary problems are solved. The present method is similar to the multiple reciprocity method (MRM) in that the computation is conducted in the real domain. However, the lengthy derivation required by the MRM has been circumvented. After comparing with the analytic solutions, MRM solutions, finite element method solutions and measured data using three examples, the applicability of the present method has been confirmed.

一、前 言

如何準確預測含不完全隔間的聲場自然聲頻一直為學

者所注意，Harris 和 Feshbach [1] 曾以微擾法解析此問題，Petyt 等人 [2,3] 曾以有限元素法分析。在邊界元素法方面，綜整概括可分成：邊界元素與有限元素合成法 (boundary

¹ 國立台灣海洋大學系統工程暨造船學系副教授

² 國立海洋大學河海工程學系教授

³ 國立海洋大學河海工程學系研究生

element and finite cell method) [4,5], 以霍姆荷茲 (Helmholtz) 方程基本解為基礎的複數型邊界元素法 [6,7], 特解積分的邊界元素法 [8~10], 雙倒易邊界元素法 (dual reciprocity method) [11,12] 與多倒易邊界元素法 (multiple reciprocity method) [13], 然而以上五種方法, 均僅適用於正常邊界問題, 亦即當定義域內的聲場空間內含有不完全隔間時, 由於隔間的厚度相對於室內空間尺寸而言是很小的, 在數學上便構成了退化邊界的問題; 將使導得的代數方程式具有奇異特性, 其解變得非常敏感 (在隔間厚度極薄情況下), 甚至於發生解不唯一的情況 (在隔間厚度為零時), 而需特別的處理。文獻上的補救方法, 有人工邊界法 [14,15], 特殊格林函數法 [16] ... 等, 然而這些方法與邊界元素法的基本精神 — “僅對問題邊界作離散” 之理念相違背, 因此一直阻礙著邊界元素法在含退化邊界問題上的進展。近年來, Chen 和 Hong [17~20] 所提出的對偶邊界積分方程 (dual boundary integral equations), 已成功地應用在一些含退化邊界的邊界值問題上, 如含板樁的滲流 [19]、彈性體的裂縫 [20] 與薄翼的氣動力學問題 [21] 等, 國內 (如 [22,23]) 均有學者根據此對偶積分架構, 在各不同領域予以推廣。而以對偶邊界積分架構來分析霍姆荷茲方程式, 已成功解決含不完全隔間的聲場問題 [24~29], 然其使用的核函數均為複數型核函數 [26]。由最近葉等人 [30] 之研究, 發現由 MRM 法所得實數核函數僅為複數核函數的實部, 誘導本文只取複數核函數之實部的想法, 然此法雖可省去 MRM 煩瑣之推導, 但仍將導致和傳統 MRM 方法一樣會發生假根與假模態問題, 本文亦將提出三種技巧來過濾假根, 並舉三個例子予以驗證。

二、聲場音壓模態方程

2.1 聲波對偶積分方程

時間域線性化聲波方程式為

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad x \in D \quad (1)$$

其中, $u(x, t)$ 為聲壓, c 為聲速, $f(x, t)$ 為聲源項, D 為問題的定義域。忽略聲源項, 在頻率域霍姆荷茲方程為

$$\nabla^2 \bar{u}(x, \omega) + k^2 \bar{u}(x, \omega) = 0 \quad (2)$$

其中, $\bar{u}(x, \omega)$ 為頻率域聲壓, k 為波數, 定義為角頻率除以聲速 ($k = \omega / c$)。為了簡便, 本文後述以 $u(x)$ 取代 $\bar{u}(x, \omega)$ 。基本解 $U(x, s)$ 與 $L(x, s)$ 分別滿足下式輔助方程,

$$\nabla^2 U(x, s) + k^2 U(x, s) = 2\pi \delta(x - s) \quad (3)$$

$$\nabla^2 L(x, s) + k^2 L(x, s) = 2\pi \frac{\partial \delta(x - s)}{\partial n_s} \quad (4)$$

其中, δ 為 Dirac delta 函數, n_s 為源點的法向量。由式(2)與上兩式(3)與(4), 並引進格林第二定理, 可得域內點對偶積分式的第一式與第二式, 分別表示如下:

$$2\pi u(x) = \int_B \{T(s, x) u(s) - U(s, x) t(s)\} dB(s), \quad x \in D \quad (5)$$

$$2\pi t(x) = \int_B \{M(s, x) u(s) - L(s, x) t(s)\} dB(s), \quad x \in D \quad (6)$$

其中, $t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$ 為音壓勢位法向導數。當 x 推到邊界, 可得到邊界點的對偶邊界積分方程式, 如下

$$\alpha(x) u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B \quad (7)$$

與

$$\alpha(x) t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B \quad (8)$$

其中, $\alpha(x)$ 為在 x 處的平面角 (本文取平滑邊界, $\alpha(x) = \pi$), $C.P.V.$ 表示柯西主值, $H.P.V.$ 表示阿達馬主值, $R.P.V.$ 表示 Riemann 主值, 而 $U(x, s)$, $T(x, s)$, $L(x, s)$, $M(x, s)$ 分別為對偶積分模式的四個核函數 [26]。

最近陳 [29] 與葉 [30] 等之研究發現在實數域多倒易法所導得之核函數僅為複數型邊界元素法中核函數的實部而已, 因此本文將省去多倒易法推導的繁瑣過程, 而直接取四個核函數的實部來求解, 即為

$$U(s, x) = \frac{\pi Y_0(kr)}{2} \quad (9)$$

$$T(s, x) = \frac{k \pi}{2} Y_1(kr) \frac{y_i n_i}{r} \quad (10)$$

$$L(s, x) = \frac{-k \pi}{2} Y_1(kr) \frac{y_i \bar{n}_i}{r} \quad (11)$$

$$M(s, x) = \frac{k \pi}{2} \left\{ -k \frac{Y_2(kr)}{r^2} y_i y_j n_i \bar{n}_j + \frac{Y_1(kr)}{r} n_i \bar{n}_i \right\} \quad (12)$$

其中, $Y_n(kr)$ 為第一類第 n 階 Hankel 函數 ($H_n^{(1)}(kr)$) 的虛部。 r 為場點與源點之間的距離, n_i 為源點的法向量之第 i 個分量, \bar{n}_i 為場點的法向量之第 i 個分量, $y_i = s_i - x_i$ 。上述四個閉合式核函數的實部, 予以級數展開後, 即為多倒易法所得之級數型核函數 [29]。亦即將(9)式展開可得

$$U(s, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-k^2)^j U_j(s, x) \quad (13)$$

其中

$$U_0(s, x) = \ln(r) + \gamma + \ln\left(\frac{k}{2}\right), \quad j = 0 \quad (14)$$

$$U_j(s, x) = 4 F_j \left(\ln(r) - S_j \right) + F_j \left(\gamma + \ln\left(\frac{k}{2}\right) \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

$$\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^j \frac{1}{l} - \ln(j) \right) \quad (16)$$

$$F_j = \frac{r^{2j}}{(j!)^2 4^j} \quad (17)$$

$$S_j = \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \quad (18)$$

式(13)和傳統多倒易法所得之核函數僅差一個複數常數 [29]，而和完備的多倒易法所得之核函數則完全相同 [30]。核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係，即為 $U(s, x) = U(x, s)$ ， $T(s, x) = L(x, s)$ 與 $M(s, x) = M(x, s)$ 。

2.2 邊界積分方程的離散化

本文採用常數元素，將對偶邊界積分方程式(7)與(8)離散化，得到對偶邊界元素法的兩個代數方程式如下：

$$[T(\lambda)] \{u\} = [U(\lambda)] \{t\} \quad (19)$$

$$[M(\lambda)] \{u\} = [L(\lambda)] \{t\} \quad (20)$$

其中， I 為單位矩陣， $\lambda = k^2$ ，且 $[U(\lambda)]$ ， $[T(\lambda)]$ ， $[L(\lambda)]$ 與 $[M(\lambda)]$ 矩陣分別由 U ， T ， L 與 M 核函數之邊界積分方程中求得。本文以客觀性觀念 (objectivity point of view) 將核函數的積分純量值轉到一參考座標系統，使計算更系統化，其座標轉換請參考圖 1。四個核函數離散化的過程分為兩種，一為正規積分，當逼近點不在積分元素時，即 $x_r \neq 0$ 或 $y_r \neq 0$ ；另一為奇異積分，當逼近點在積分元素內時，即 $x_r = 0$ 與 $y_r = 0$ 的情況，其極限過程，先令 $x_r = 0$ ， $y_r = \varepsilon$ ，再使 ε 逼近於 0。

以上兩個過程分別可得：

(1) U 核函數之正規積分為

$$U_{ij} = \frac{\pi}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_0(k\sqrt{(x_r-s)^2 + y_r^2}) ds, \quad (i \neq j) \quad (21)$$

弱奇異積分為

$$U_{ii} = \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0.5l}^{0.5l} Y_0(k\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}) ds = \frac{\pi}{2} \left\{ Y_0\left(\frac{kl}{2}\right) l + k \int_{-0.5l}^{0.5l} \{Y_1(k|s|) |s| ds\}, \quad (i \text{ no sum}) \right\} \quad (22)$$

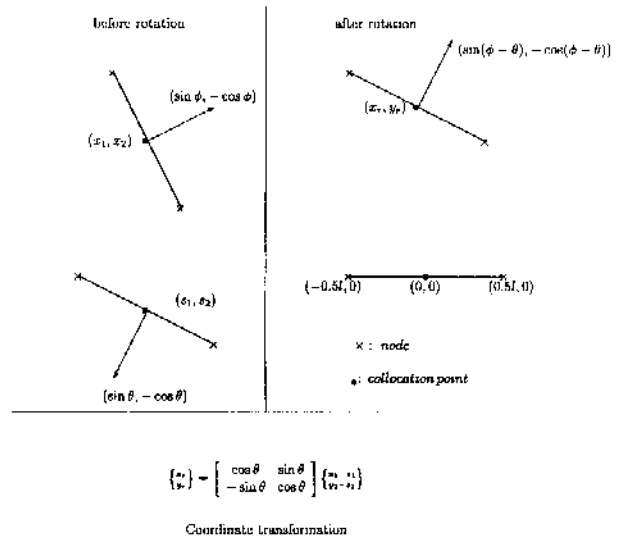


圖 1 客觀性座標轉換示意圖

(2) T 核函數之正規積分為

$$T_{ij} = -\frac{\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_1(k\sqrt{(x_r+s)^2 + y_r^2}) \frac{y_r}{\sqrt{(x_r-s)^2 + y_r^2}} ds, \quad (i \neq j) \quad (23)$$

強奇異積分為

$$T_{ii} = -\frac{\pi k}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_1(k\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}) \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} ds = \pi, \quad (i \text{ no sum}) \quad (24)$$

(3) L 核函數之正規積分為

$$L_{ij} = -\frac{\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_1(k\sqrt{(x_r+s)^2 + y_r^2}) \frac{(x_r-s) \sin(\phi-\theta) - y_r \cos(\phi-\theta)}{\sqrt{(x_r-s)^2 + y_r^2}} ds, \quad (i \neq j) \quad (25)$$

強奇異積分為

$$L_{ii} = -\frac{\pi k}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_1(k\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}) \frac{-\varepsilon}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi k}{2} \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(-2)}{\pi k \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} ds = -\pi, \quad (i \text{ no sum}) \quad (26)$$

(4) M 核函數之正規積分為

$$M_{ij} = \frac{\pi k}{2} \int_{-0.5l}^{0.5l} -k \frac{Y_2(k\sqrt{(x_r-s)^2 + y_r^2})}{(x_r-s)^2 + y_r^2} (-y_r)$$

$$\{(x_r - s) \sin(\phi - \theta) - y_r \cos(\phi - \theta)\} + \frac{Y_1(k\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2})}{\sqrt{(x_r - s)^2 + y_r^2}} \cos(\phi - \theta) ds, \quad (i \neq j) \quad (27)$$

超強奇異積分爲

$$M_{ii} = -\frac{\pi k}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-0.5l}^{0.5l} -k \frac{Y_2(k\sqrt{s^2 + \epsilon^2})}{s^2 + \epsilon^2} (-\epsilon)(-\epsilon) + \frac{Y_1(k\sqrt{-s^2 + \epsilon^2})}{\sqrt{-s^2 + \epsilon^2}} ds = \frac{\pi k}{2} \left\{ -2Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + k \left[Y_0\left(\frac{kl}{2}\right) + k \int_{-0.5l}^{0.5l} Y_1(k|s|) |s| ds \right] \right\}, \quad (i \text{ no sum}) \quad (28)$$

式(21)至(28)轉換後的正規積分項，均可使用高斯積分法處理即可。

2.3 各種邊界條件的特徵方程

代入齊次邊界條件後，可得以下三種不同邊界條件的超越函數的特徵值問題，如下

1. Dirichlet 邊界條件：如開窗之邊界，即作用在邊界上的聲壓爲零 ($u = 0$)，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$\{U(k)\} \{t\} = \{0\} \quad (29)$$

$$\{[L(k)] + \alpha[I]\} \{t\} = \{0\} \quad (30)$$

2. Neumann 邊界條件：如完全剛性之鋼板或壓克力板邊界，即作用在邊界上之音壓的法向導微爲零

$$\left(t = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right), \text{ 將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，}$$

得以下二式，

$$\{[T(k)] - \alpha[I]\} \{u\} = \{0\} \quad (31)$$

$$\{M(k)\} \{u\} = \{0\} \quad (32)$$

3. Robin 邊界條件：如一般之吸音材料聲音部份被吸收部份被反射，(例如 $u + t = 0$)，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，得以下二式，

$$\{[T(k)] - \alpha[I] + [U(k)]\} \{u\} = \{0\} \quad (33)$$

$$\{[M(k)] + [L(k)] + \alpha[I]\} \{u\} = \{0\} \quad (34)$$

以上之特徵值問題爲非標準對稱型矩陣，有關標準對稱型矩陣在 [31] 中有所探討。本文係以行列式直接搜尋法來求得其特徵頻率，國內洪與劉 [32]、洪與李 [33] 等均使用過此法。這個方法是在每一個頻率求出其相對應的影響係數矩陣的行列式值，予以作圖 [26]。然後，由此圖找出行列式值爲零的頻率，即爲特徵頻率；但是因邊界積分離散化的過程中所導致的誤差，故其行列式值在數值運

算下並不爲零，因此一般採用圖中的局部極小值，即認定爲特徵頻率。

三、退化邊界之模擬與假根之處理

對於不含退化邊界問題，對偶邊界積分式中任取一式均可求得自然聲頻與聲模，但當定義域內含不完全隔間時，會造成奇異的影響係數矩陣，使解產生不唯一的情況，即病態的行爲。因而無法決定自然聲頻，此時需合成第一式與第二式。假設第 i 個與第 j 個元素爲其退化邊界，則對偶積分式第一式及第二式的第 i 與第 j 個方程式相依：一組完全一樣，一組相差負號，因此造成兩組方程組相依，此時只要將第一式之第 i 個方程式與第二式之第 i 個方程式交換，則兩個方程組都會變成獨立，因而聲場之自然聲頻與聲模即可決定。

本文只取複數核函數的實部來求解自然聲頻與聲模特徵值，伴隨假根之問題，本文提供以下三個方法來區別：

1. 將對偶積分之第一式及第二式所求到的根相互比較，若兩值相差很大時，即爲假根。若很相近時，則可能爲真正的特徵根。
2. 將對偶積分之第一式及第二式所求到的相同根，畫出其對應的模態，再比較兩式所求出的模態。若兩模態是相同時，即是此空間的自然聲模，其根則爲自然聲頻。
3. 將對偶積分的第一式所求到的根代回第二式或第二式所求到的根代回第一式，分別以 Neumann 與 Dirichlet 邊界條件爲例：

$$\{[T(k)] - \alpha[I]\} \{u_T\} = \{0\}; \{U(k)\} \{t_U\} = \{0\} \quad (35)$$

或

$$\{M(k)\} \{u_M\} = \{0\}; \{[L(k)] + \alpha[I]\} \{t_L\} = \{0\} \quad (36)$$

所求得其對應的邊界聲模資料 (u_T, u_M 與 t_U, t_L) 經正規化 ($\| \{u_T\} \| = 1, \| \{u_M\} \| = 1$ 與 $\| \{t_U\} \| = 1, \| \{t_L\} \| = 1$) 後，再代入對偶積分的另一式，可求得一誤差指標， ϵ_T, ϵ_M 與 ϵ_U, ϵ_L ，分述如下：

$$\{M(k)\} \{u_T\} = \{\epsilon_T\}; \{[L(k)] + \alpha[I]\} \{t_U\} = \{\epsilon_U\} \quad (37)$$

或

$$\{[T(k)] - \alpha[I]\} \{u_M\} = \{\epsilon_M\}; [U(k)] \{t_L\} = \{\epsilon_L\}; \quad (38)$$

上式中 ϵ_T 與 ϵ_M 分別表示由 UT 式與 LM 式算出的誤差量。最後，可畫出波數 k 對誤差量 ϵ_T 與 ϵ_M 的圖，理論上誤差量爲零時，其所對應的根爲其自然聲頻，但因邊界積分的離散化導致的誤差，所以我們配合 1 與 2 的方法，取一門檻值來決定是否爲其自然聲頻，即可成功地過濾假根與假模。

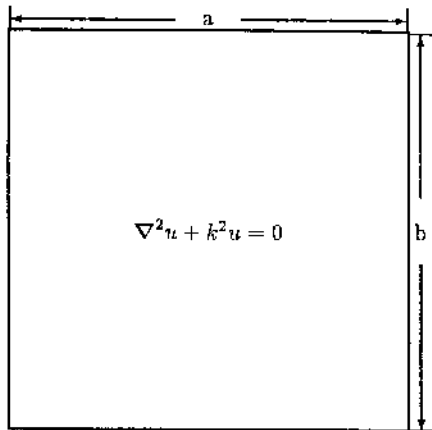
四、計算結果

本節以三個算例，考慮聲速 c 爲 340m/sec，進行無隔

間與含不完全隔間聲場自然聲頻與聲模之計算，及假根之過濾，以驗證本文提供方法的可行性及程式之正確性。

算例一：無隔間之二維正方形內域聲場

如圖 2 所示，聲場空間尺寸為 $a = 1\text{m}$ ， $b = 1\text{m}$ ，其中 a 為長度， b 為寬度。考慮 Dirichlet 邊界條件，可求得解析聲頻與本文方法採用 80 個常數元素所求得的根，結果如表 1 所示，圖 3(a) 與圖 3(b) 分別表示為 UT 與 LM 方法所得到之聲模等音壓線圖，圖 3(c) 為解析解之聲模等音



case 1. $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$

圖 2 無隔間聲場空間示意圖

表 1 解析解與本法在算例一所解得特徵頻率 (Dirichlet 問題)

	Mode 1			Mode 2		Mode 3		Mode 4	Mode 5
Analytical	240.4			380.1		480.8		537.6	612.9
Present (UT)	240.3	292.2*	346.3*	379.3		480.5	519.5*	537.3	613.1
Present (LM)	240.0			379.3		480.0		537.9	609.0

where * denotes the spurious root

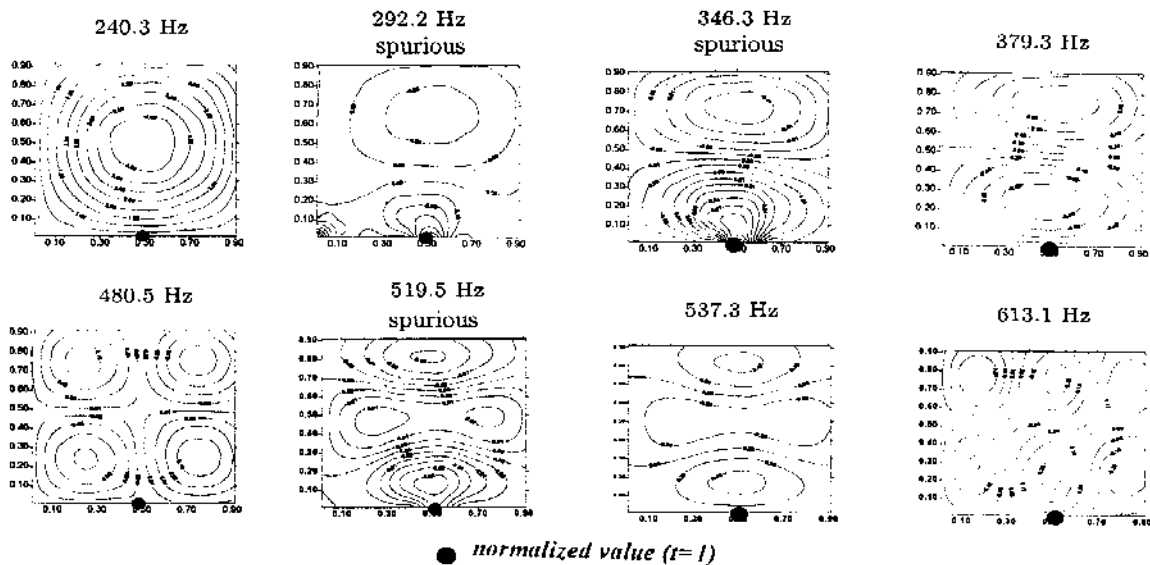


圖 3(a) 算例一 Dirichlet 邊界條件 UT 方法之聲模等音壓線圖

壓線圖，圖 4(a) 與 4(b) 分別為對偶積分式(30)求得特徵向量 $\{u_L\}$ 經正規化代入式(29)與對偶積分式(29)求得特徵向量 $\{u_U\}$ 經正規化代入式(30)所得特徵頻率對誤差量 (ϵ_L , ϵ_U) 的圖。

算例二：無隔間之內域長方形聲場

如圖 5 所示，聲場空間尺寸為 $a = 0.236\text{m}$ ， $b = 0.112\text{m}$ ， $h = 0.0\text{m}$ ，其中 h 為隔間的高度。考慮 Neumann 邊界條件，求得解析聲頻、MRM、ABAQUS 程式、實驗結果，及本文方法採用 80 個常數元素所求得的根，如表 2 所示。本法與解析解相當吻合，假根由圖 6(a) 至圖 7(b) 之判斷方法可以去除；圖 6(a) 與圖 6(b) 分別表示為 UT 與 LM 方法所得到之聲模等音壓線圖，圖 6(c) 為解析解之聲模等音壓線圖，圖 7(a) 與圖 7(b) 分別為式(36)中 $\{u_M\}$ 正規化代入式(38)與式(35)中 $\{u_T\}$ 正規化代入式(37)所得特徵頻率對誤差量 (ϵ_M , ϵ_T) 的圖。

算例三：含不完全極薄隔間 (厚度為零) 之內域聲場空間

如圖 5 所示，尺寸分別為 $a = 0.236\text{m}$ ， $b = 0.112\text{m}$ ， $h = 0.056\text{m}$ ， $e = 0.0\text{m}$ 。考慮 Neumann 邊界條件，可求得 MRM、ABAQUS 程式、實驗結果及本文方法採用 100 個常數元素的根，如表 3 所示，從圖 8(a) 與圖 8(b) 為本文方法用對偶積分方程之第一式 (合成第二式) 與第二式 (合成第一式) 所得到的模態之等音壓線圖。圖 9(a) 與圖 9(b) 分別為式(36)中 $\{u_M\}$ 正規化代入式(38)與式(35)中 $\{u_T\}$ 正規化代入式(37)特徵頻率對誤差量 (ϵ_M , ϵ_T) 的圖。

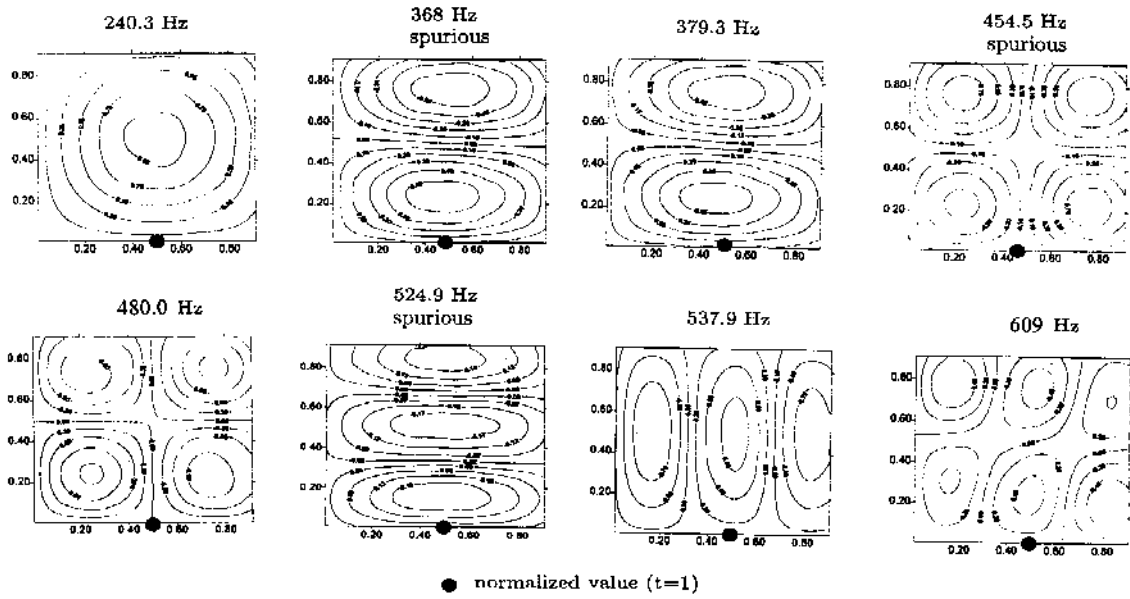


圖 3(b) 算例一 Dirichlet 邊界條件 LM 方法之聲模等音壓線圖

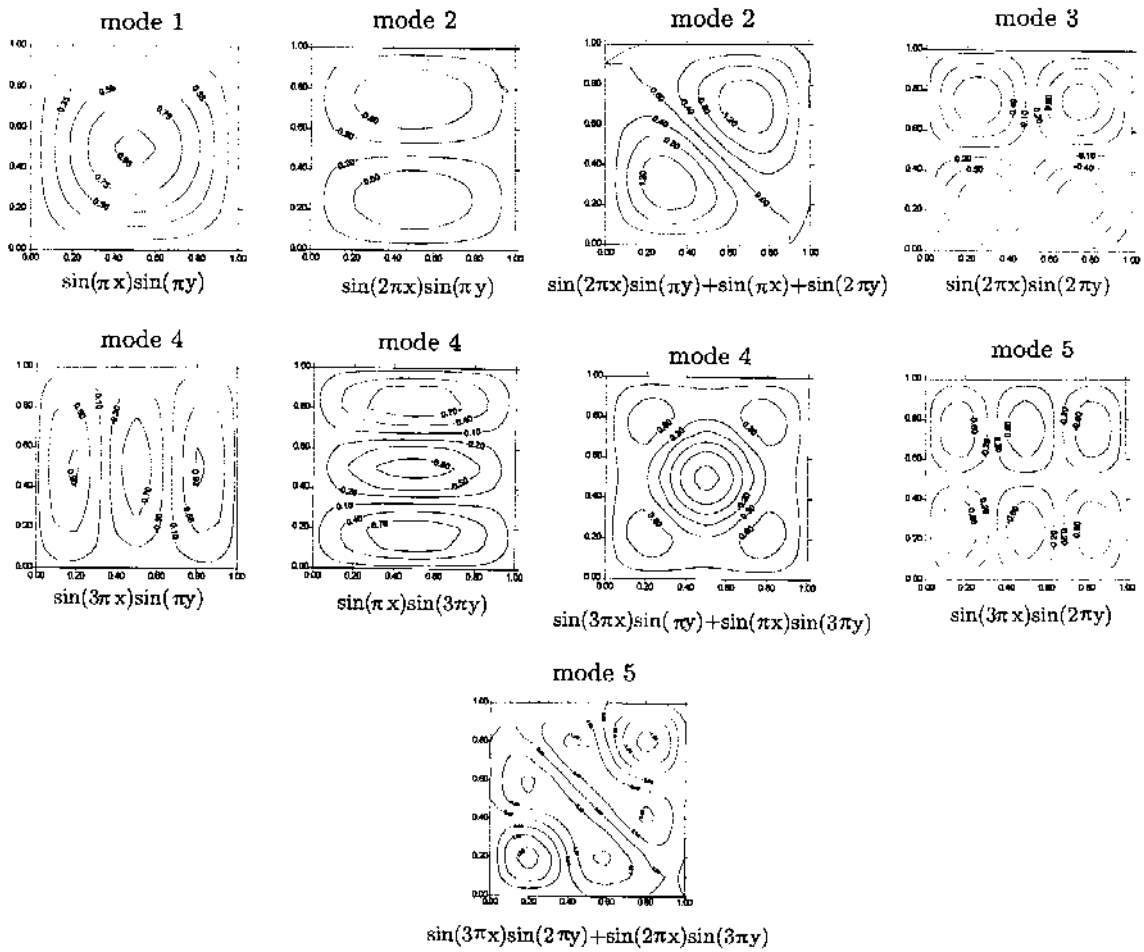


圖 3(c) 算例一 Dirichlet 邊界條件解析解之聲模等音壓線圖

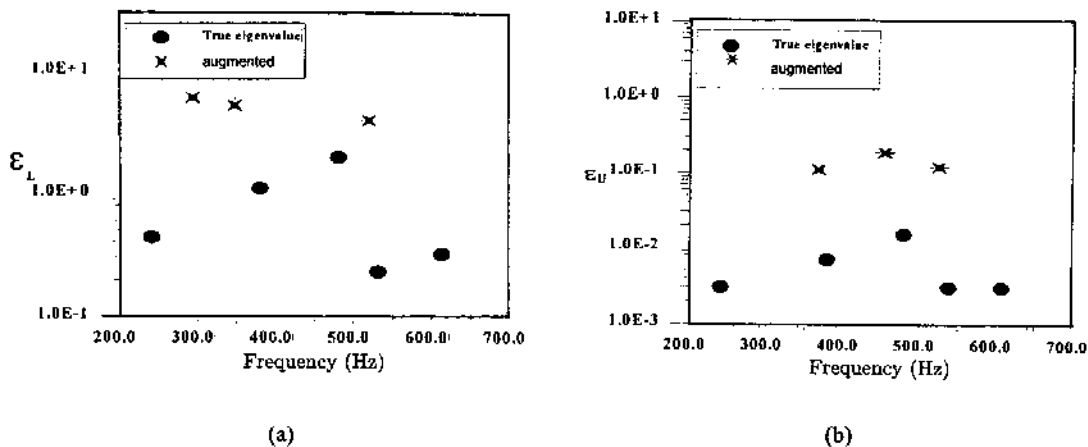
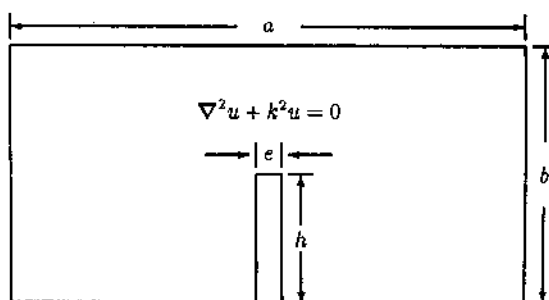


圖 4 (a) 算例一 Dirichlet 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_L) 的圖
 (b) 算例一 Dirichlet 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_U) 的圖



case 2. $a = 0.236\text{m}$, $b = 0.112\text{m}$, $h = 0\text{m}$, $e = 0.01\text{m}$
 case 3. $a = 0.236\text{m}$, $b = 0.112\text{m}$, $h = 0.056\text{m}$, $e = 0.0\text{m}$

圖 5 不完全隔間聲場空間示意圖

表 2 解析解、多倒易法 (MRM)、ABAQUS 程式、實驗結果及本法在算例二所解得特徵頻率 (Neumann 問題)

	Mode 1		Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Analytical	720.3		1440.7	1517.9	1680.1	2092.7
Present (UT)	720.8	1044.4*	1442.1	1518.4	1618.0* 1650.4*	1682.0 1910.2*
Present (LM)	720.8	1044.4*	1442.1	1518.0	1650.4*	1680.2 1919.2*
MRM (UT)	721.3	1219.2*	1444.3	1520.0	1688.9	1997.8*
MRM (LM)	719.7	903.7* 1154.8* 1178.0* 1188.3*	1447.5	1509.7	1723.3	1932.4*
FEM by ABAQUS AC2D4	468.1*	724.0	1420.0	1496.0	1630.0	1960.0
FEM by ABAQUS AC2D8		729.0	1458.0	1536.0	1700.0	2118.0
Measurement		720.0	1515.0	1677.0	1827.0	2264.0

where * denotes the spurious root

NA: not available since only ten series terms in the MRM are chosen

表 3 多倒易法 (MRM)、ABAQUS 程式、實驗結果及本法在算例三所解得特徵頻率 (Neumann 問題)

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Present (UT)	587.7	1044.4*	1443.7	1518.4	1537.0 1650.4*
Present (LM)	587.7		1440.5	1517.9	1535.7 1628.8* 1931.8*
MRM (UT)	577.2	1219.2*	1444.3	1529.0	1535.9 1692.6* 1997.6* 2112.3*
MRM (LM)	467.7*	576.7 903.7* 1178.0* 1188.0*	1447.3	1509.7	1521.3 1749.0*
FEM by ABAQUS AC2D4	618.0		1421.0	1496.0	1527.0
FEM by ABAQUS AC2D8	605.0		1458.0	1536.0	1563.0
FEM by Petyt	591.0		1478.0	1540.0	1570.0
Measurement	570.0		1470.0	1534.0	1555.0

where * denotes the spurious root

NA: not available since only ten series terms in the MRM are chosen

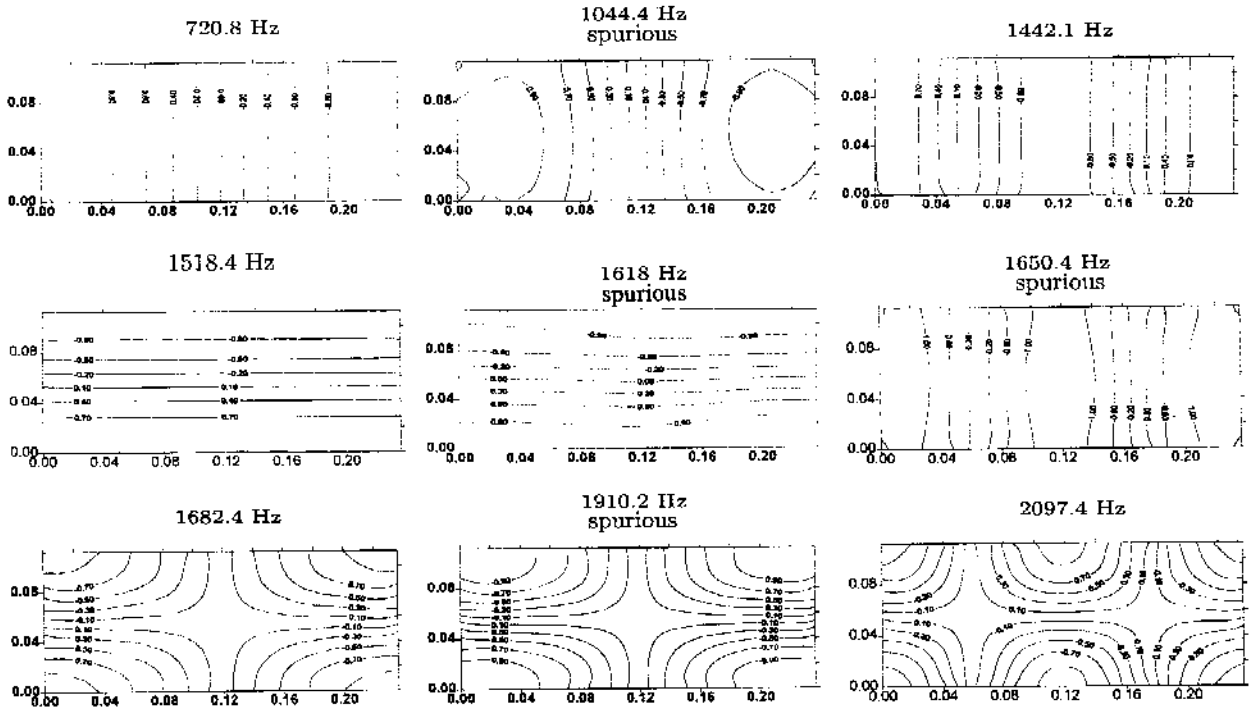


圖 6(a) 算例二 Neumann 邊界條件 UT 方法之聲模等音壓線圖

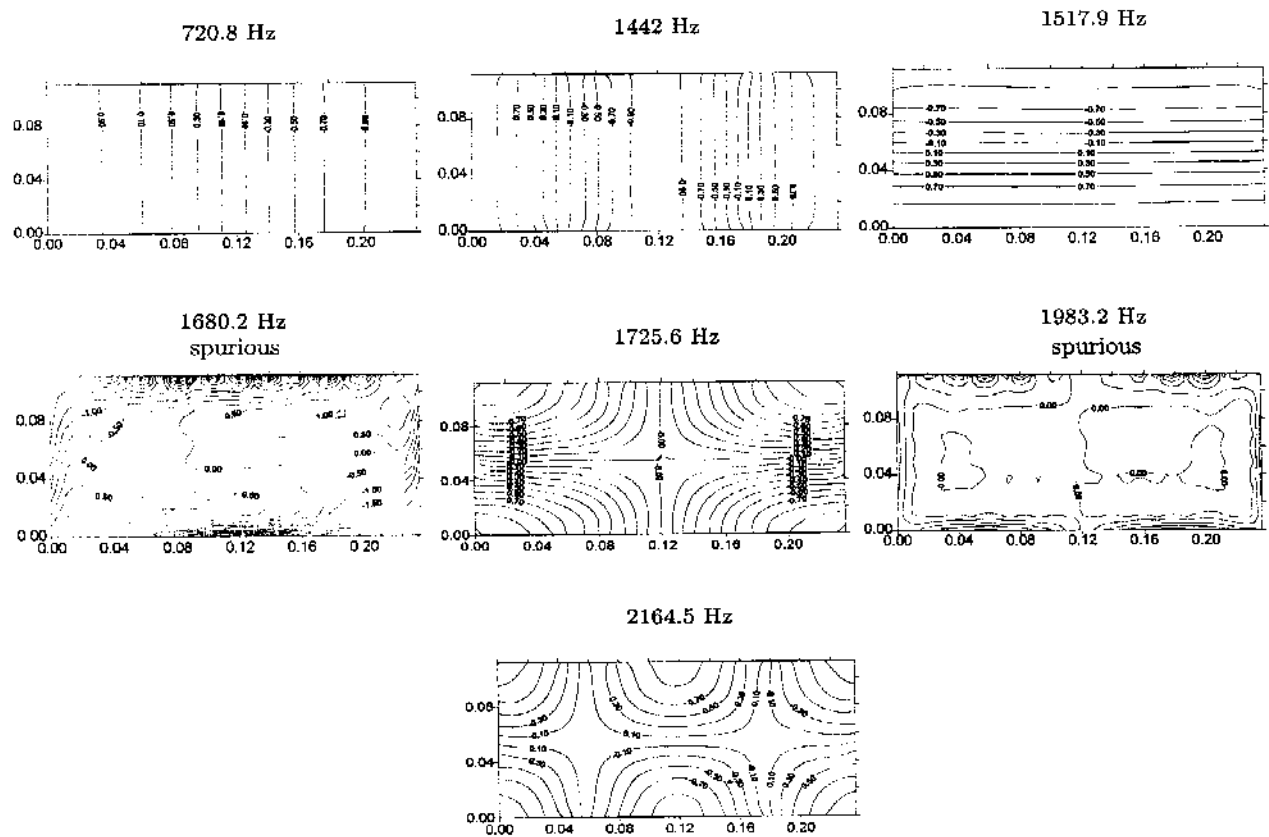


圖 6(b) 算例二 Neumann 邊界條件 LM 方法之聲模等音壓線圖

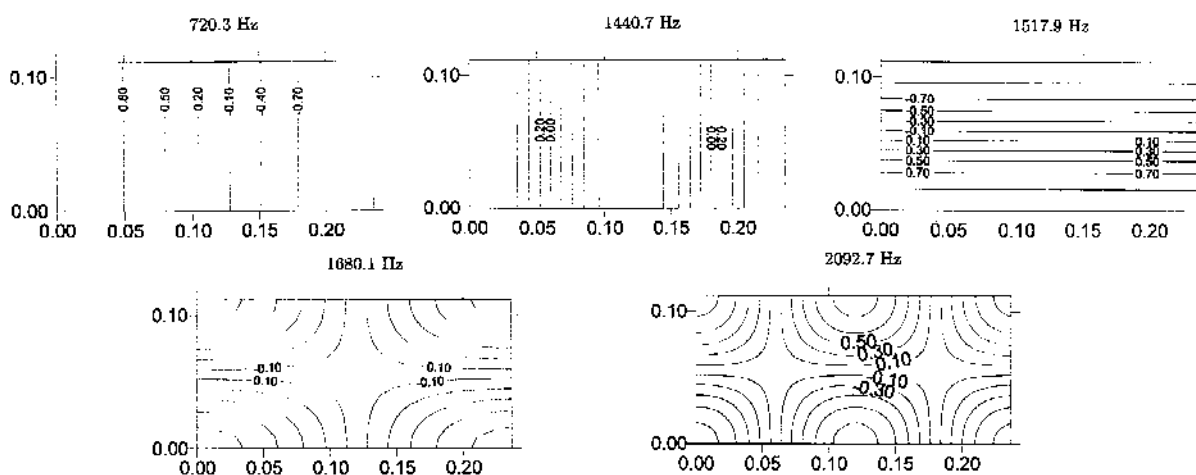
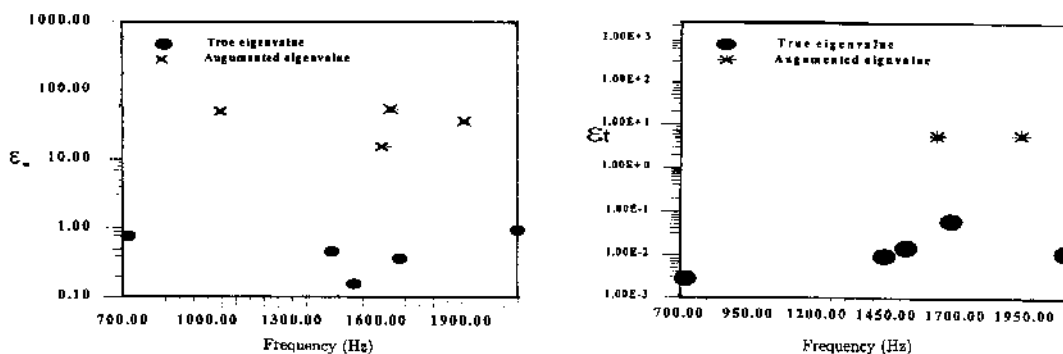


圖 6(c) 算例二 Neumann 邊界條件解析解之聲模等音壓線圖



(a)

(b)

圖 7 (a) 算例二 Neumann 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_M) 的圖
(b) 算例二 Neumann 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_I) 的圖

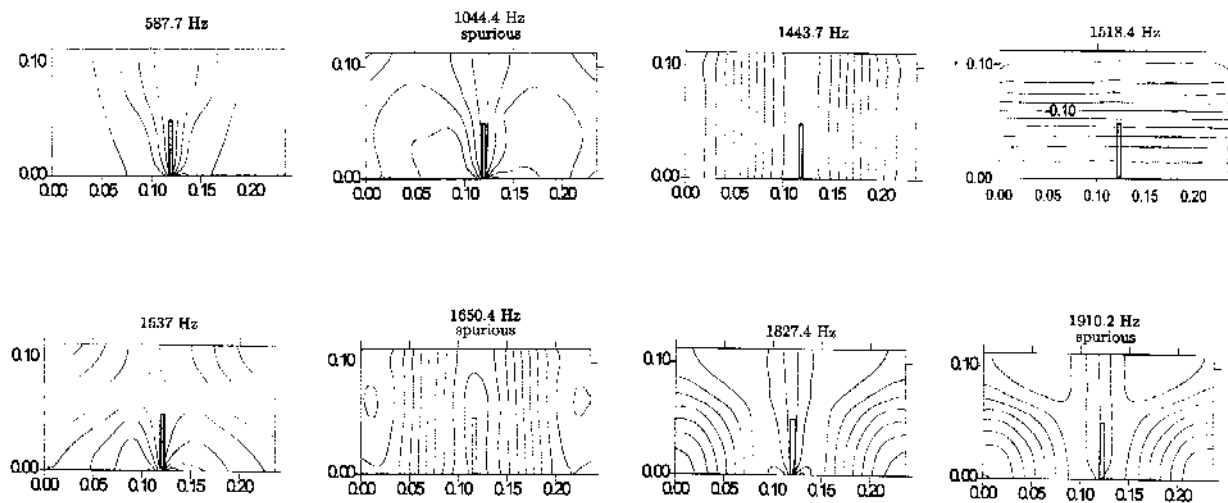


圖 8(a) 算例三 Neumann 邊界條件 UT 方法之聲模等音壓線圖

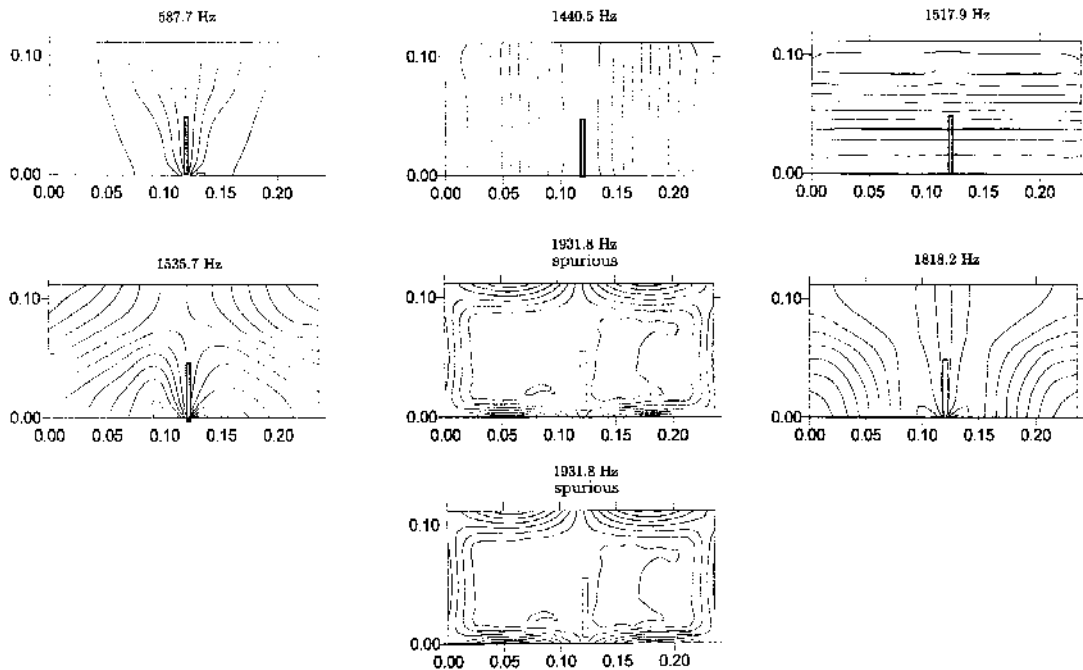


圖 8(b) 算例三 Neumann 邊界條件 LM 方法之聲模等音壓線圖

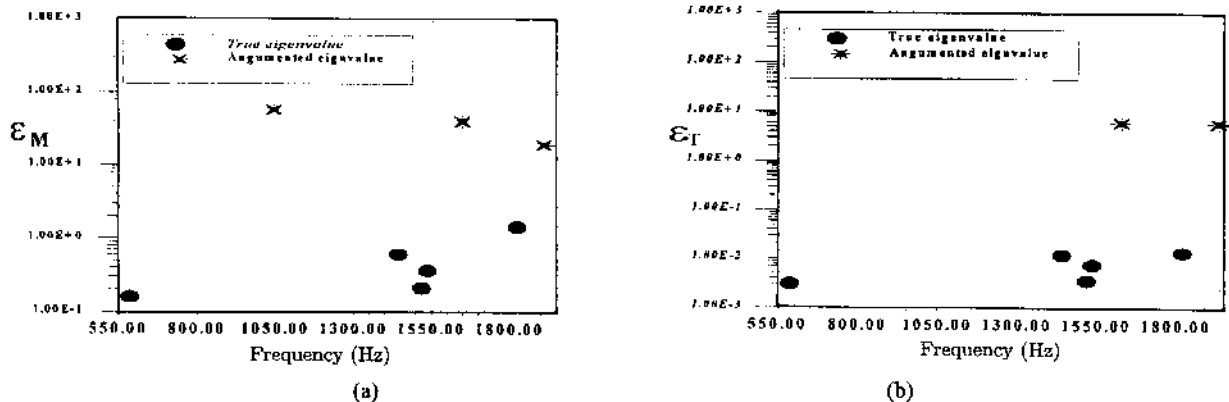


圖 9 (a) 算例三 Neumann 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_M) 的圖
(b) 算例三 Neumann 邊界條件特徵頻率對誤差量 (ϵ_T) 的圖

以上算例，由三個去除假根的方法皆可分辨出假根的模態與真正的模態，其中圖 4、圖 7 與圖 9 殘餘誤差值偏大的原因，乃是元素數目很多時影響係數與正規化向量乘積所放大之效果。

五、結 論

綜合二維聲場的聲頻與聲模問題分析結果，可得下列幾點的結論：

1. 於含不完全隔間之聲場特性分析時，本文已成功地將奇異積分方程 (UT) 及超奇異積分方程 (LM) 之奇異積分 (singular integral) 與超奇異積分 (hypersingular integral) 轉換成正規積分，成功建構對偶邊界元素法。
2. 本文僅取對偶積分方程中之複數型核函數的實部求解，

既可省去 MRM 推導級數型核函數的繁瑣過程，更可僅在實數域中解決問題。

3. 只取本法的複數核函數的實部所導致和傳統 MRM 一樣的假根問題，本文提供出對偶架構三個相輔相成的系統化方法來過濾假根與假模，並已驗證其可行性。
4. 經三個算例應證，本文僅取複數型對偶積分方程核函數的實部可以成功地分析含極薄不完全隔間之聲場問題，解決了傳統邊界元素法於退化邊界所造成自然聲頻與聲模無法決定的困難。

誌 謝

本文作者感謝國科會提供研究計畫 NSC-86-2211-E-019-0065 之經費贊助。研究期間，台大土木系洪宏基教授與海大河工系葉為忠博士的諸多寶貴建議，亦一併致謝。

參考文獻

1. Harris, C.M., and Feshbach, S., "On the acoustics of coupled room," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 22, pp. 572-578 (1950).
2. Petyt, M., Lea, J., and Koopman, G.H., "A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shapes cavities," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 45, pp. 495-502 (1976).
3. Petyt, M., Koopman, G.H., and Pinnington, R.J., "Acoustic modes of rectangular cavity with a rigid, incomplete partition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 53, pp. 71-82 (1977).
4. Bezine, G., "A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems," *Mechanical Research Communications*, Vol. 7, pp. 141-150 (1980).
5. Liu, S.D.S., and Chen, T.-D. "A BEM-FEM formulation for membrane vibration analysis," *Boundary Elements XV*, Vol. 2, pp. 407-421, Rencis, J.J., and Brebbia, C.A., eds., Computational Mechanics Publication, Southampton (1993).
6. Beskos, D.E., ed., *Boundary Element Method in Mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1987).
7. Liou, D.Y., and Hong, H.K., "Wave pressure response spectrum of fixed ocean structure," *Journal of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*, Vol. 11, pp. 1-13 (1992).
8. 陳正宗、洪宏基，邊界元素法，第 2 版，新世界出版社，台北 (1992)。
9. Ahmad, S., and Banerjee, P.K., "Free vibration analysis by BEM using particular integral," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 112, pp. 682-695 (1986).
10. Banerjee, P.K., Ahmad, S., and Wang, H.C., "A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1299-1309 (1988).
11. Nardini, D., and Brebbia, C.A., "A new approach to free vibration analysis using boundary elements," *Boundary Element Methods in Engineering*, Brebbia, C.A., ed., Springer-Verlag (1982).
12. Nardini, D., and Brebbia, C.A., "Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis," *Topics in Boundary Element Research, Vol. 2, Time Dependent and Vibration Problems*, Brebbia, C.A., ed., Springer-Verlag (1985).
13. Nowak, A.J., and Neves, A.C., eds., *Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Publ., Southampton (1994).
14. Blandford, G.E., Ingrassia, A.R., and Liggett, J.A., "Two dimensional stress intensity factor computations using boundary element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 387-404 (1981).
15. Lafe, O.E., Montes, J.S., Cheng, A.H.D., Liggett, J.A., and Liu, P.L-F., "Singularity in darcy flow through porous media," *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 106, HY6, pp. 977-997 (1980).
16. Snyder, M.D., and Cruse, T.A., "Boundary integral equations analysis of cracked anisotropic plates," *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 315-328 (1975).
17. Chen, J.T., "On hadamard principal value and boundary integral formulation of fracture mechanics," Master Thesis, Institute of Applied Mechanics, National Taiwan University (1986).
18. Chen, J.T., "On a dual representation model and its applications to computational mechanics," Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University (1994).
19. Chen, J.T., Hong, H.-K., and Chyuan, S.W., "Boundary element analysis and design in seepage flow problems with sheetpiles," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 17, pp. 1-20 (1994).
20. Hong, H.K., and Chen, J.T., "Derivation of integral equations in elasticity," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 114, No. 6, Em5, pp. 1028-1044 (1988).
21. Wang, C.S., Chu, S., and Chen, J.T., "Boundary element method for predicting store airloads during its carriage and separation procedures," in Grilli, S., Brebbia, C.A., and Cheng, A.H.D., eds., *Computational Engineering with Boundary Elements, Vol. 1: Fluid and Potential Problems*, p. 3 (1990).
22. Chen, W.H., and Chen, T.C., "An efficient dual boundary element technique for a two-dimensional fracture problem with multiple cracks," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 1739-1756 (1995).
23. 曹登皓、岳景雲、周鄂東，「浸水剛性垂直薄板擋波效果的對偶邊界元素法解析」，第十七屆海洋工程研討論文集，中華民國，臺灣，第 749-763 頁 (1995)。
24. 陳桂鴻，「對偶邊界積分方程式在聲場上之應用」，碩士論文，海洋大學河海工程研究所，基隆 (1997)。
25. Wong, F.C., "Analysis and experiment for acoustic modes of a cavity containing an incomplete partition," Mater Thesis, Department of Harbor and River Engineering, National Taiwan Ocean University, Keelung, Taiwan (1997).
26. 陳桂鴻、陳正宗、劉德源，「對偶邊界積分方程式在聲場上之應用」，中國力學期刊，第十四卷，第二期，第 1-11 頁 (1998)。
27. Chen, J.T., and Chen, K.H., "Dual integral formulation for determining the acoustic modes of a two-dimensional cavity with a degenerate boundary," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 21, No. 2, pp. 105-116 (1998).
28. Chen, J.T., and Wong, F.C., "Analytical derivations for one-dimensional eigenproblems using dual BEM and MRM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 20, No. 1, pp. 25-33 (1997).
29. Chen, J.T., "Recent development of dual BEM in acoustic problem," *Proceedings, The Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Argentina (1998).
30. Yeih, W., Chen, J.T., Chen, K.H., and Wong, F.C., "A study on the multiple reciprocity method and complex-valued formulation for the Helmholtz equation," *Advances*

- in Engineering Softwares*, Vol. 29, No. 1, pp. 1-6 (1998).
31. Chen, J.T., and Wong, F.C., "Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 1, pp. 75-95 (1998).
32. 洪宏基、劉德源，「邊界元素法解析空間音場自然頻率之探討」，海洋大學第二十一期理工學報，第 27-42 頁 (1986)。
33. 李有豐，「音場空間共鳴問題的邊界元素法」，碩士論文，台灣大學土木工程學研究所，台北 (1989)。

87年3月2日	收稿
87年11月13日	修改
87年11月25日	接受