中華民國第六屆結構工程學術研討會
The 6th National Conference on Structural Engineering
Kenting, Taiwan, R.O.C, 26-28 August 2002
Paper No. F25

對稱化邊界元素法理論推導與程式開發

Symmetric BEM formulation and program development

陳正宗 [1]**，陳桂鴻** [2]**，丘宜平** [2]

關鍵詞：對稱化對偶邊界元素法、奇異值分解法(SVD)**、阿達馬主值、對偶級數表示模式與雙重積分**

中文摘要

本研究以洪宏基教授與陳正宗教授所共同提出的對偶邊界積分方程為架構，發展對稱化邊界元素法。其原理主要是利用對偶架構中四個核函數間的對稱與轉置對稱關係，配合雙重積分的能量觀念，取代原先點配置（Point Collocation**）技巧導得的非對稱邊界元素法。本研究有下列數個優點：**(1).**傳統邊界元素影響係數矩陣不對稱的缺點將可避免。**(2).**對稱化的邊界元素法於互制問題中將易於與有限元素法（**FEM**）結合。**(3).**由於未知邊界自由度的係數矩陣為對稱，故可減少計算機的記憶空間與計算時間並增加求解的精確度與速度。本研究為了要將未知邊界自由度的係數矩陣對稱化，故須在傳統邊界積分方程式再將邊點對邊界做一次積分，而這雙重的強奇異及超強奇異積分，為本研究的一項重點。最後，本研究發展一套以** FORTRAN **程式撰寫的二維** Laplace **場之對稱化邊界元素法程式，並舉數個二維例子，進行解析與數值驗證，並針對係數矩陣特性與計算精確度等方面探討非對稱與對稱** BEM **的差異。**

---

[1] **國立台灣海洋大學河海工程學系教授**

[2] **國立台灣海洋大學河海工程學系研究生**

1、緣由與目的

對偶表示式模式(dual representation model)**係由洪宏基教授與陳正宗教授共同提出，該模式含對偶積分方程**(dual integral equations)[1]**與對偶級數表示式**(dual series representations)[2]。**而對偶積分方程即為對偶邊界元素法的理論基礎。**

本研究在對偶積分式的架構上，建立對稱化的係數矩陣，也就是對稱化的邊界元素法，故本文以此為主要研究方向。在傳統的對偶邊界元素法架構上，原本四個核函數（U、T、L **與** M**）具有漂亮完美的對稱與轉置對稱特性（**U **與** M **為對稱，**T **與** L **互為轉置對稱），但是，由於積分方程的邊界積分動作場點僅取點配置（**point collocation**），使得積分後這兩個特性被破壞了，導致邊界元素法係數矩陣不對稱，這個缺憾也是常為一般人所詬病的地方。 為了克服這個問題，可利用四個核函數間的對稱與轉置對稱關係，再將四個核函數的邊界配置點再對邊界做一次積分，此法類似變分法的能量觀念，如此四個核函數所對應的影響係數矩陣便可再呈現對稱與轉置對稱特性，在這第二重積分之後，所浮現的問題正是本文所要研究的重點之一：雙重奇異與雙重超強奇異積分。原本傳統對偶積分式的架構中，就已要面對奇異積分與超強奇異積分的困難（這些問題，已被洪宏基教授與陳正宗教授解決）**[8][9]**，而今本研究要在奇異積分上再積分，這又是一個更需要深入探討的問題，尤其是對偶積分式第二式中的** M **核函數，要在** M **核函數的超強奇異積分上再積分，是一個高度奇異的問題。對於這個問題，在以往眾多的文獻當中**[4][5][6] [7]**，並沒有探討過如何以常元素處理這個問題，有鑑於此，本文將深入探討以常元素求雙重超強奇異積分的問題。在雙重積分的問題之後，即四個核函數間經雙重積分之後恢復了對稱與轉置對稱的特性，下一步本文將利用這些特性，組合出未知（欲求）邊界自由度的係數矩陣，如此可將計算機儲存陣列的記憶體空間減少一半，並增加計算的速度與求解的精確度**[3][10]。

2、研究方法

本研究是利用四個核函數間互為對稱與轉置對稱關係，組成對稱的未知邊界自由度之係數矩陣。由於傳統的邊界積分式，將源點對邊界積分，此一單點配置技巧(point collocation)**破壞了四個核函數完美的對稱與轉置對稱關係，故我們須將傳統的對偶邊界積分式，針對邊界配置點再對邊界做一次積分，把已破壞的對稱、轉置對稱關係挽救回來。推導如下：**

$$\int_{B(x)} au(x)dB(x) = \int_{B(x)} C.P.V.\int_{B(s)} T(s,x)u(s)dB(s)dB(x) - \int_{B(x)}\int_{B(s)} U(s,x)t(s)dB(s)dB(x) \quad (1)$$

$$\int_{B(x)} at(x)dB(x) = \int_{B(x)} H.P.V.\int_{B(s)} M(s,x)u(s)dB(s)dB(x) - \int_{B(x)} C.P.V.\int_{B(s)} L(s,x)t(s)dB(s)dB(x) \quad (2)$$

將對偶邊界雙重積分式(1)**與**(2)**離散化後**(**由於本章僅討論常元素，故邊界自由度可提出積分外**)**可將原來式子中等號左邊的積分項表示為** au_i $, i = 1 \sim N$ **，並移至等號右邊後，可表示如下：**

$$\sum_{j=1}^{N} T_{ij}^{(2)} u_j - \sum_{j=1}^{N} U_{ij}^{(2)} t_j = 0 \ , \ i = 1 \sim N \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{N} M_{ij}^{(2)} u_j - \sum_{j=1}^{N} L_{ij}^{(2)} t_j = 0 \ , \ i = 1 \sim N \quad (4)$$

上式中 N **為元素個數，其中四個影響係數矩陣之元素型式，可表示為**

$$U_{ij}^{(2)} = \int_{B(x_i)}\int_{B(s_j)} U(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) \quad (5)$$

$$T_{ij}^{(2)} = \int_{B(x_i)}\int_{B(s_j)} T(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) - d_{ij}\int_{B(x_i)} au(x_i) dB(x_i) \quad (6)$$

$$L_{ij}^{(2)} = \int_{B(x_i)}\int_{B(s_j)} L(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) + d_{ij}\int_{B(x_i)} at(x_i) dB(x_i) \quad (7)$$

$$M_{ij}^{(2)} = \int_{B(x_i)}\int_{B(s_j)} M(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) \quad (8)$$

上式中，上標(2)**是表示積分兩次的意思，**d_{ij} **代表**$i = j$ **時為** 1**，**$i \neq j$ **均為** 0**。**

由於核函數特性 U **與** M **為對稱，**T **與** L **互為轉置對稱，可推導證明，經由雙重積分後，四個核函數影響係數矩陣又回復了漂亮的對稱與反對稱特性**

$$U_{ij}^{(2)} = U_{ji}^{(2)} \quad (9)$$

$$T_{ij}^{(2)} = L_{ji}^{(2)} \ , \ if \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \quad (10)$$

$$T_{ii}^{(2)} = -L_{ii}^{(2)} \quad (11)$$

$$M_{ij}^{(2)} = M_{ji}^{(2)} \quad (12)$$

我們可利用上述關係，組合針對未知（欲求）邊界條件的係數矩陣成為對稱矩陣。組合方式如下：

1.**若為** Dirichlet **邊界條件，則直接用** UT **雙重積分式即可，因為** U **矩陣即為對稱的未知邊界自由度係數矩陣。**

2.**若為** Neumann **邊界條件，則直接用** LM **雙重積分式即可，因為** M **矩陣即為對稱的未**

知邊界自由度係數矩陣。

3.**若為混合型**(Mixed type)**邊界條件，則以** UT **雙重積分式為主體，將已知** t **邊界條件的部份以** LM **雙重積分式代換，此時** LM **雙重積分式須在等號兩邊加上負號。依上述方式組合完畢後，再將未知邊界自由度及其對應係數搬到等號左邊，已知邊界條件及其對應係數搬到等號右邊。如此，混合型邊界條件的未知邊界自由度係數矩陣即為對稱化的矩陣。**

從上述方法中，我們即可導得對稱未知邊界自由度的係數矩陣。

本研究以常元素探討對稱化的邊界元素法，首先必須克服的就是 U、T、L **與** M **四核函數的雙重奇異積分問題，而這部份目前並沒有任何的文獻可以參考，所以必須先對其雙重積分的行為與本質深入的瞭解，所幸經研究得知，**(5)~(8)**式中源點對邊界上的元素做第二重積分時，由於函數行為良好，可直接利用高斯數值積分得到其積分值，但是**(8)**式核函數** M **其場點與源點位於同一元素做雙重積分時，會得到一個發散的積分值，並且場點積分與源點積分對於相鄰元素上時，其雙重積分值也為發散，亦即矩陣中** tridiagonal **項會有問題。其實左右相鄰兩元素於第二重積分時無窮大的部份，恰為中間元素本身做雙重積分時無窮大值的一半且正負相反。換言之，若可以求出中間元素對自己做雙重積分的值，則相鄰兩元素的積分值便也一同解決。但很可惜的，此積分值不存在，即使利用廣義函數所定義的** $\int_0^h \frac{1}{x} dx = \ln h$ **積分主值，也不能求得理想的雙重積分核函數係數矩陣** $M^{(2)}$**。但是，本研究中提出一個大膽的方法以求得該雙重積分值，雖然此法未能經數學方法證明它的正確性，但是在本文的各個數值算例中，確是能求得合理的未知邊界物理量。求此雙重積分值方式如下：**

$$
\begin{aligned}
M_{ii}^{(2)} &= F.P.\left\{\lim_{e\to 0}\left[\int_{-h+e}^{h-e}\left(\int_{-h}^{x-e} M(s,x)ds + \int_{-h}^{x-e} M(s,x)ds\right)dx\right]\right\} \\
&= F.P.\left\{\lim_{e\to 0}\left[\int_{-h+e}^{h-e}\left(-\frac{2}{e}+\frac{1}{h+x}+\frac{1}{h-x}\right)dx\right]\right\} \\
&= F.P.\left\{\lim_{e\to 0}\left[4-\frac{4h}{e}-2\ln 0+2\ln 2h\right]\right\} \\
&= 4 + 2\ln 2h
\end{aligned}
\tag{13}
$$

此積分值求法，雖然不能以嚴謹的數學方法證明之，但是其適用性，確是可以接受的。

3、結果與討論

本研究以兩個實際例子算出的數值結果，與解析解或 BEPO2D 程式所做的結果相比較（見圖 1、2)。從圖中可以看得出此方法所求得之邊界物理量，與解析解相比較誤差都在容許範圍之內，而與 BEPO2D 程式結果相比較，所解得之答案趨勢也非常類似。所以對於求解一般問題的應用上，此法所求得的數值結果應該是可以值得參考的。

本研究以常元素求 M 核函數雙重奇異積分主值的過程當中，雖然尚不能以數學方法推導出確實正確的結果。但是，隱約可以感覺出存在一個經雙重積分對稱化的 M 核函數影響係數矩陣，其必定滿足物理定律，故能否以數學論證出該矩陣，是未來一個值得探究的方向。

4、結論

常元素對稱化邊界元素法的研究當中，本研究可利用取有限項的方法求得 M 核函數的雙重奇異積分值，並可實際求解未知邊界物理量，卻可以得到滿意的結果。故本研究以此作法發展出一套程式以對稱化邊界元素法解決不含退化邊界的問題，由於其係數矩陣為對稱矩陣，故無論於增加數值求解精度與減少計算機記憶矩陣的記憶體空間，都優於傳統非對稱邊界元素法。

5、誌謝

感謝國科會編號 NSC-89-2211-E-019-004, 對國立台灣海洋大學提供經費補助。

6、參考文獻

[1] Hong, H. K. and Chen, J. T., Derivation of integral equations inelasticity, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.114, No.6, Em5, pp.1028-1044, 1988.

[2] Chen, J. T. and Hong, H. K., Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series, Applied Mechanics Reviews, ASME, Vol.52, No.1, pp.17-33, 1999.

[3] Chen J. T. and Chiu Y. P., 2002, On the pseudo-differential operators in the dual boundary integral equations using degenerate kernels and circulants, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 26, No.1., pp.41-53.

[4] Balakrishna, C., Gray, L. J. and Kane, J. H., Efficient analytical integration of symmetric Galerkin boundary integrals over curved element: Thermal conduction formulation, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.,

Vol.111, pp.335-355, 1992.

[5] Balakrishna. C., Gray. L. J. and Kane. J. H., Efficient analytical integration of symmetric Galerkin boundary integrals over curved element: Elasticity formulation, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.117, pp.157-179, 1994.

[6] Bonnet, M., Maier, G. and Polizzotto, C., Symmetric Galerkin boundary element methods, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.51, pp.669-703, 1998.

[7] Bonnet, M., A Regularized Galerkin Symmetic BIE Formulation For Mixed Elastic Boundary Value Problems, Boundary Elements - Abstracts and Newsletter, Vol.4, NO.3, pp. 109-113, 1993.

[8] **陳正宗**, **對偶表示模式及其在計算力學之應用**,**國立台灣大學土木工程學研究所博士論文**, 1994.

[9] **陳正宗**, **破裂力學之邊界積分推導與阿達馬主值之研究**,**國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文**, 1986.

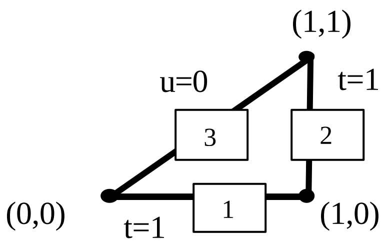
[10] **丘宜平**, **對稱與非對稱邊界元素法理論探討與研究**,**國立台灣海洋大學河海工程學研究所碩士論文**, 1999.

Keywords: symmetric dual boundary element method, singular value decomposition (SVD), Hadamard principal value, hypersingularity, dual series representation, double integration

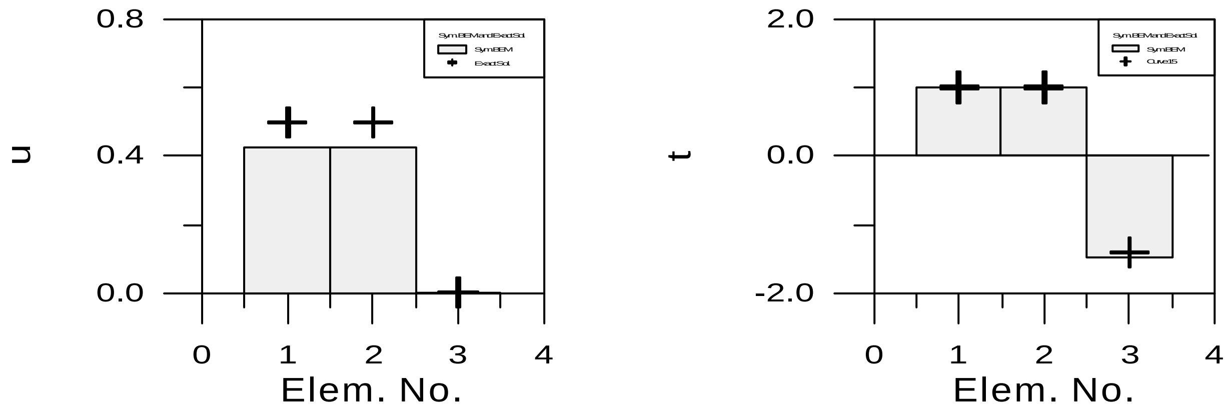
Abstract

Based on the dual framework derived by Hong and Chen, we developed symmetric boundary element method, instead of conventional BEM. Using the symmetry properties for the four kernels in the dual BEM, the symmetric BE formulation can be derived through double integrations. The main advantages are (1).The unsymmetric influence matrix in the conventional BEM can be avoided, (2).The coupling use with FEM can be easily implemented, and (3).The storage space in memory can be saved, and the solutions can be obtained more efficiently and accurately. The main challenge is that double integrations for the singular and hypersingular kernels should be dealt with. In order to check the influence matrices, not only the test of constant potential but also equilibrium condition were employed. A general program was developed for the Laplace equation. Finally, several examples were

demonstrated. The comparisons with the conventional BEM and the symmetric BEM on memory storage, efficiency, and accuracy were discussed.

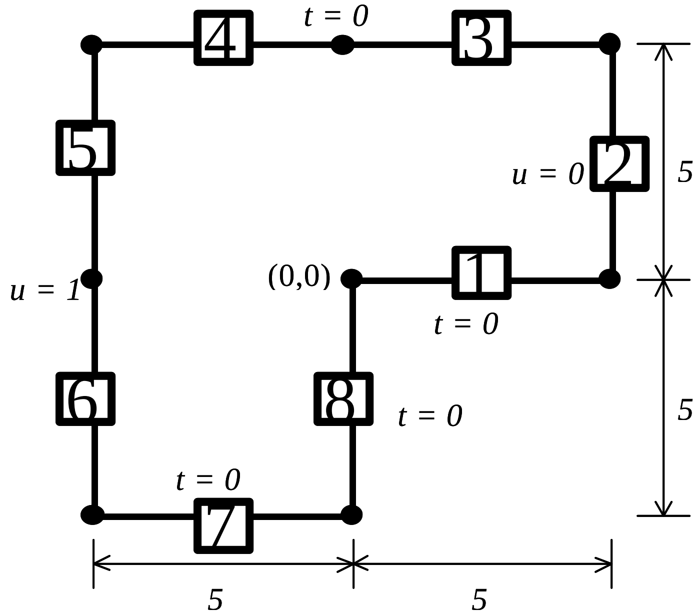


(a) 問題邊界與已知邊界條件

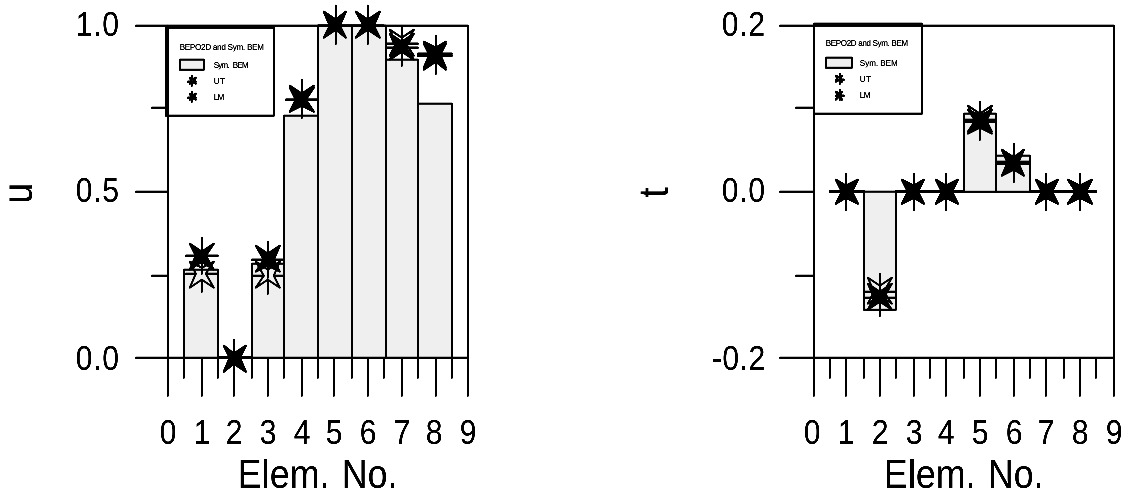


(b)對稱化BEM與解析解比較

圖 1　對稱化BEM求解三角形邊界量分析圖



(a)問題邊界與已知邊界條件



(b)對稱化BEM與BEPO2D結果比較

圖2 對稱化BEM求解L形問題邊界量分析圖