

中醫式的工程分析法— 邊界積分方程法(或邊界元素法)與無網格法之研究

陳正宗¹ 李應德²

國立台灣海洋大學河海工程學系

一、研究動機(含擬解決的問題)

對於實際工程問題而言，其定義域的幾何形狀非常的複雜，解析解往往不容易求得。因此，我們必須藉由一些數值方法，如：有限差分法、有限元素法與邊界元素法，來近似求解我們所要知道的場量。根據所使用的方法不同，其背後所需的數學基礎與解題邏輯也不盡相同。最早為工程師使用的是有限差分法，該法是以差分原理為基礎，針對我們欲求解的領域作切割，求得我們欲知的場量。而有限元素法則以最小勢能法與變分理論為基礎，將欲求解的領域切割成許許多多元素，元素與元素間滿足力平衡與位移連續來求解出整個場量。此兩法有個共通點是均須對欲解的領域作切割，然後一次求得整個領域的場量。而邊界積分方程(或邊界元素法)，則是以功能互換法為其理論基礎，積分方程為其架構，將體積分轉成面積分，面積分變成線積分。就空間維度而言，邊界元素法少了一個維度。因此避免了領域切割，而只需要對其邊界作切割。而近年來，無網格法頗為盛行，該法不需針對領域或者問題表面作切割，也不需作積分的運算，只需在欲求解的問題表面佈上幾個點，藉由點與點間的距離影響關係作運算，即能求得欲知的場量。做法簡單，因此廣為流行。近年大量老舊結構物急需診斷，工程師就如同醫師一樣對其作健康檢查。就臨床醫學角度而言，前兩者(有限差分法與有限元素法)類似西醫，需動手術開刀將身體內部(領域 domain)切割來治療疾病；而後兩者(邊界元素法與無網格法)則是中醫療法，邊界元素法就像是中醫裡的把脈，在人的手腕表面(邊界面 boundary surface)聽診就可知道身體有什麼狀況，然後對症下藥且藥到病除。而無網格法則是屬於針灸療法，僅須針對穴道(邊界點 boundary node)作針灸，就可以減少疼痛。不同療法皆有其信奉者，到底是西醫好或者是中醫佳？無一定論。我們在此不作以矛攻盾或以盾防矛之傻事亦不老王賣瓜自賣自誇的吹噓。關鍵在於身體有什麼狀況(欲解問題 solved problem)，對症下藥，使用適合的療法(數值方法)，就可得最好的治療效果。因此近年來有所謂中西合璧之醫療法，就類似有限與邊界的聯合法一樣。

二、計畫內容說明

作者於 1986 年與台大洪宏基教授導得超奇異邊界積分方程式，配合奇異邊界積分方程式，開創對偶邊界元素法。成功地應用在裂縫問題、薄翼理論、以及熱傳、滲流、外域、聲場等問題上。英國已有公司根據我們的理論開發大型商程式，廣為工業界所採用，如圖一與圖二所示。其後，觀念又延伸至無網格法，在無網格法處理了，一、二維與三維聲場問題。近年來，為了克服邊界元素法本

身產生的一些缺點如：需將邊界做切割、會有邊界層效應、必須計算奇異與超奇異積分、…等，於是我們更使用邊界積分方程配合退化核與傅立業級數，成功求解含多圓型孔洞或置入物問題，並且克服了上述的缺點。這些年來，我們研究團隊，使用了對偶邊界元素法、無網格法與邊界積分方程法，針對許許多多的問題，包含了拉普拉斯、赫姆茲、雙諧和與雙赫姆茲方程等均有做一些探討，也應用到求解含置入物、壓電材料等問題，均能得到滿意之結果。在國科會十餘年來的經費支助下，以 NTOU/MSV 所發表的 SCI 論文已超過百篇且已有四百三十多篇論文引用過我們的研究成果，在此作一回顧與報告一些成功的案例。

三、研究成果的主要貢獻或突破

1. 航空方面：

作者於九零年代與王政盛博士將小板法(即為邊界元素法)應用到飛機的流場分析。如圖三所示為戰鬥機的網格示意圖，圖四為邊界元素法所得之流場分析圖。

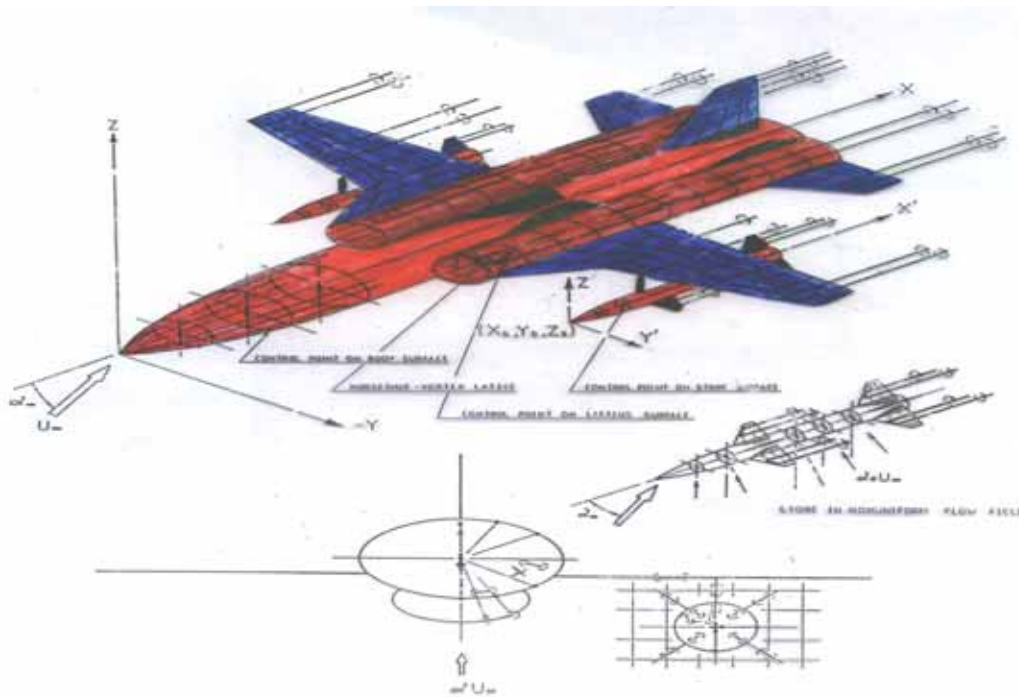


Fig.1 Image system of all the singularities in aircraft/external store configurations.

圖三 戰鬥機表面網格示意圖

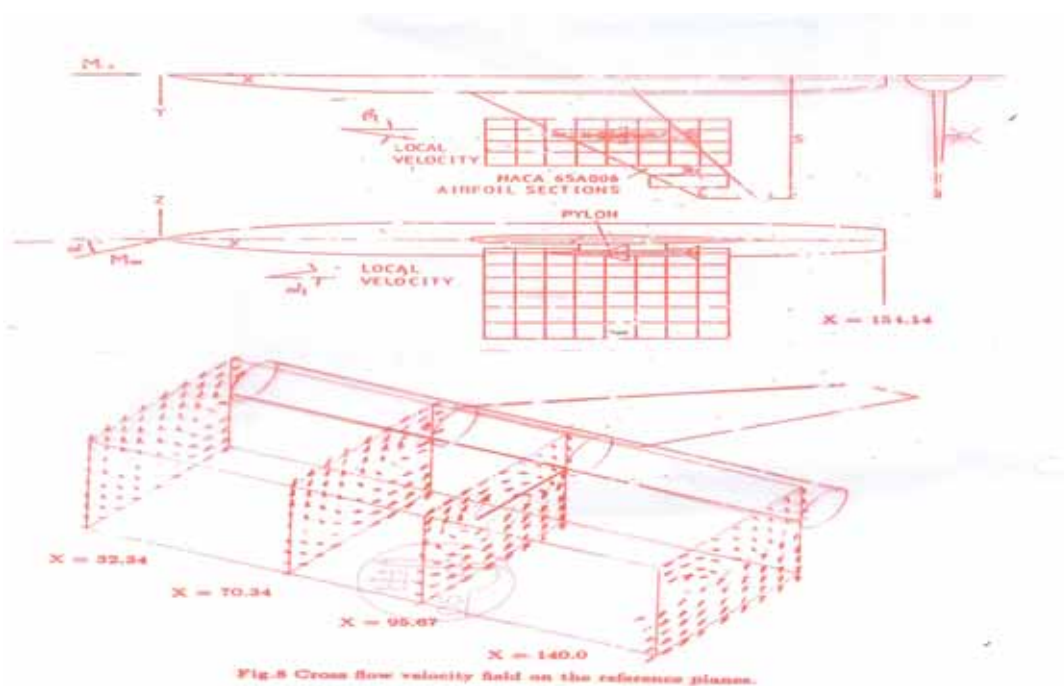


Fig. 8 Cross flow velocity field on the reference planes.

圖四 流場示意圖

另一例子則為彈體 V-band 結構的裂縫成長預測應用。如圖五所示 V-band 結構的示意圖，圖六則為 V-band 結構的幾何資料說明。

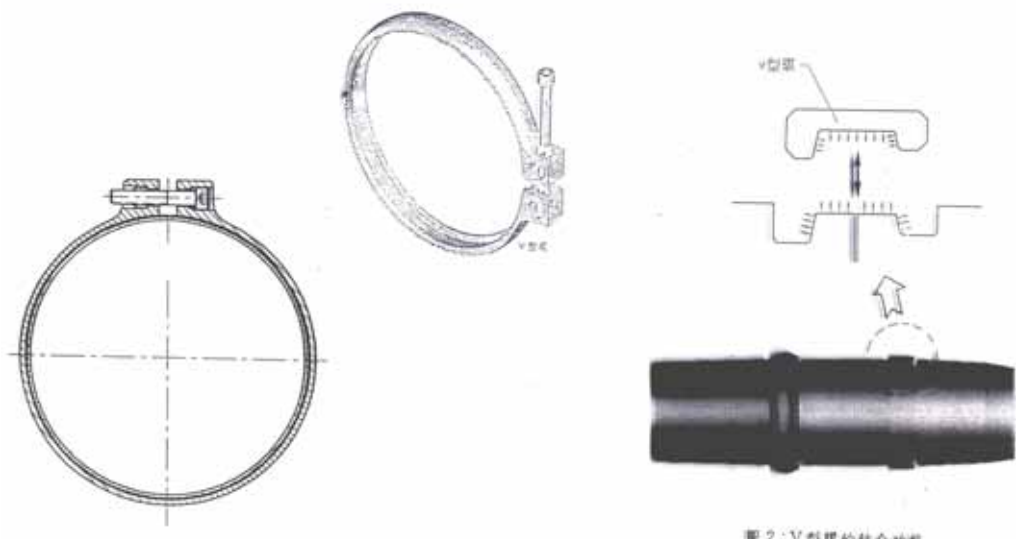


圖 1 · V 型環的結構示意圖

圖 2 · V 型環的結合功能

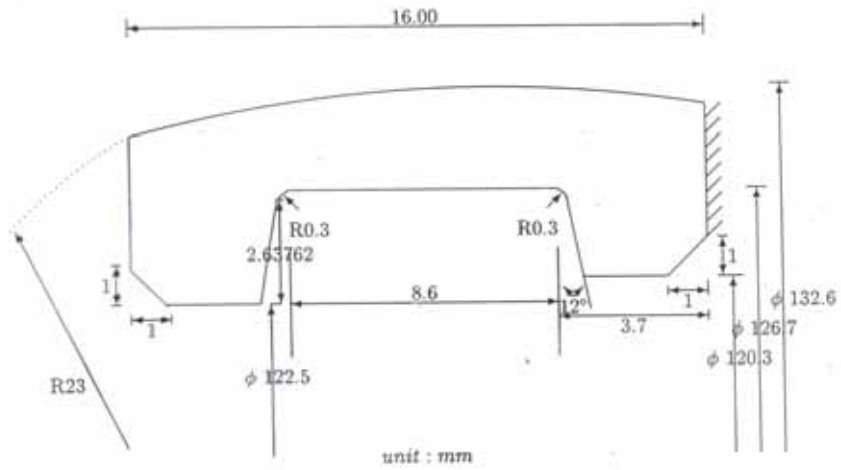
V 帶結構示意圖

圖五 彈體 V-band 結構示意圖

Application to V-band structure:

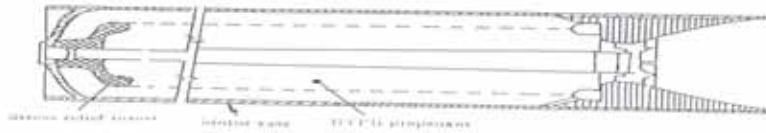
$E = 19950 \text{ kgf/mm}^2$, $\nu=0.27$,
 $a=0.125$ $\sigma = 3.63 \text{ kgf/mm}^2$

Pari's law: $\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$
 $C = 4.624 \times 10^{-12}$, $m=3.3$, $R=\frac{2}{3}$



圖六 彈體 V-band 結構幾何外型

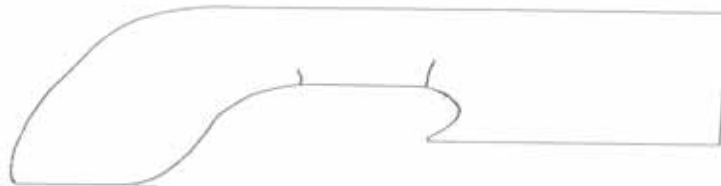
在此，我們也應用到火箭應力消除塊的裂縫成長分析。圖七(a)為火箭結構示意圖，圖七(b)則為裂縫成長預測分析，圖七(c)則為實驗結果。



圖七(a) 火箭結構示意圖



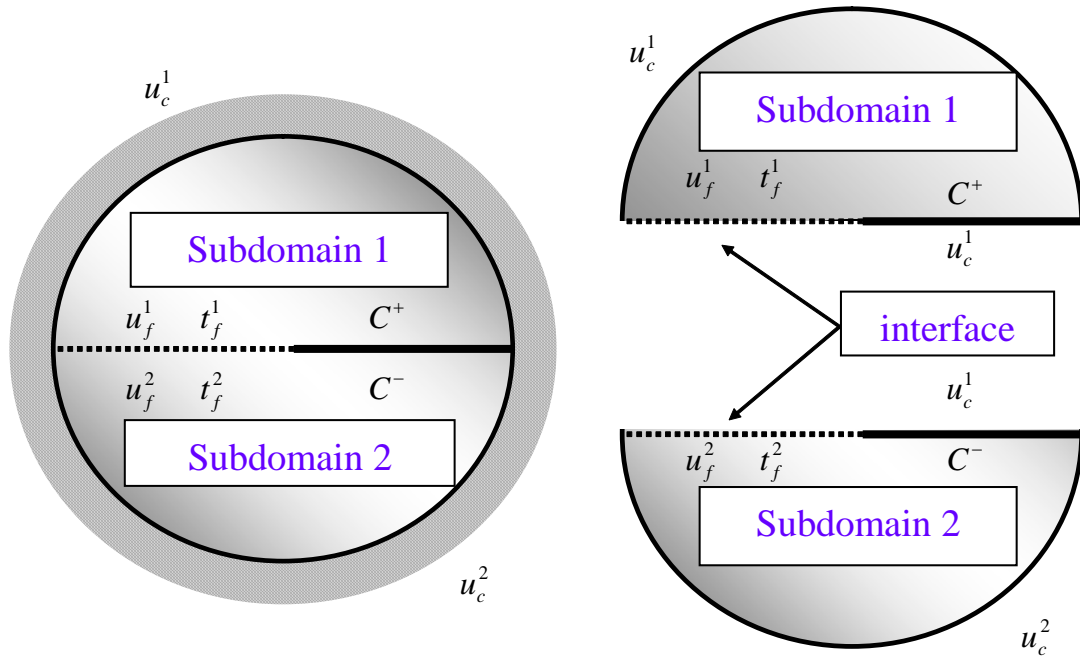
圖七(b) 成長路徑(預測)



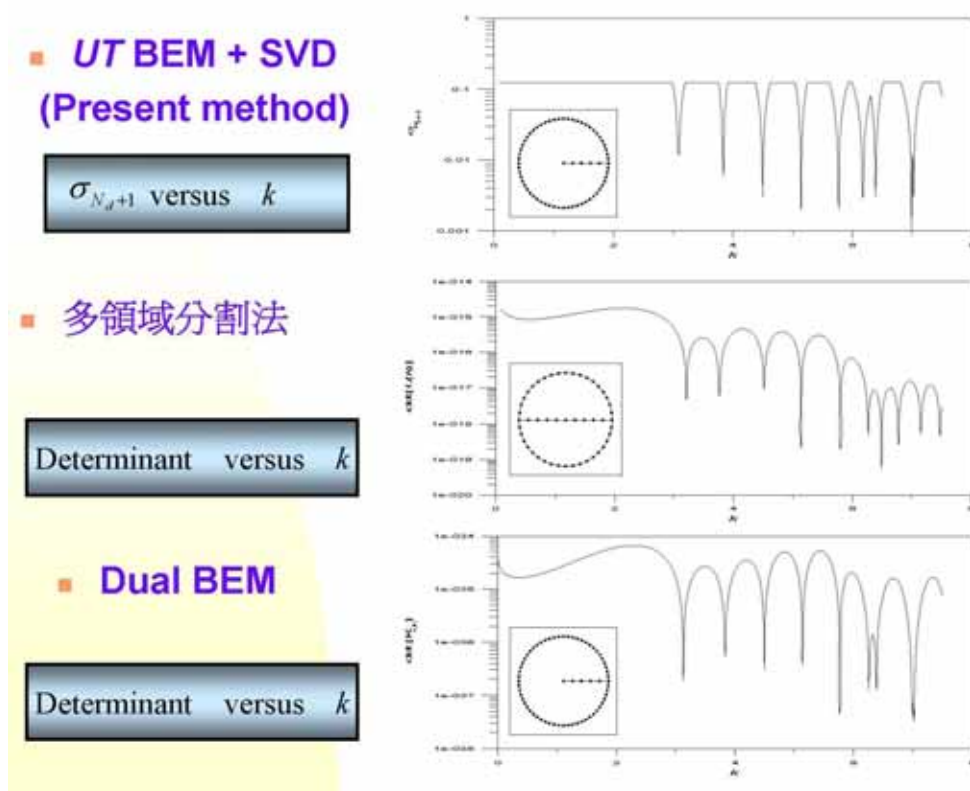
圖七(c) 成長路徑(實驗)

2. 退化邊界分析：

過去針對退化邊界問題的分析，許多學者都是採用領域切割法來探討此類的問題，如圖八所示。將原本的問題，切割成兩個領域來做討論。而在連接的邊界，則必須滿足位移連續與力平衡。但此一作法，需將問題變成多領域來做分析討論，



圖八 多領域分割法

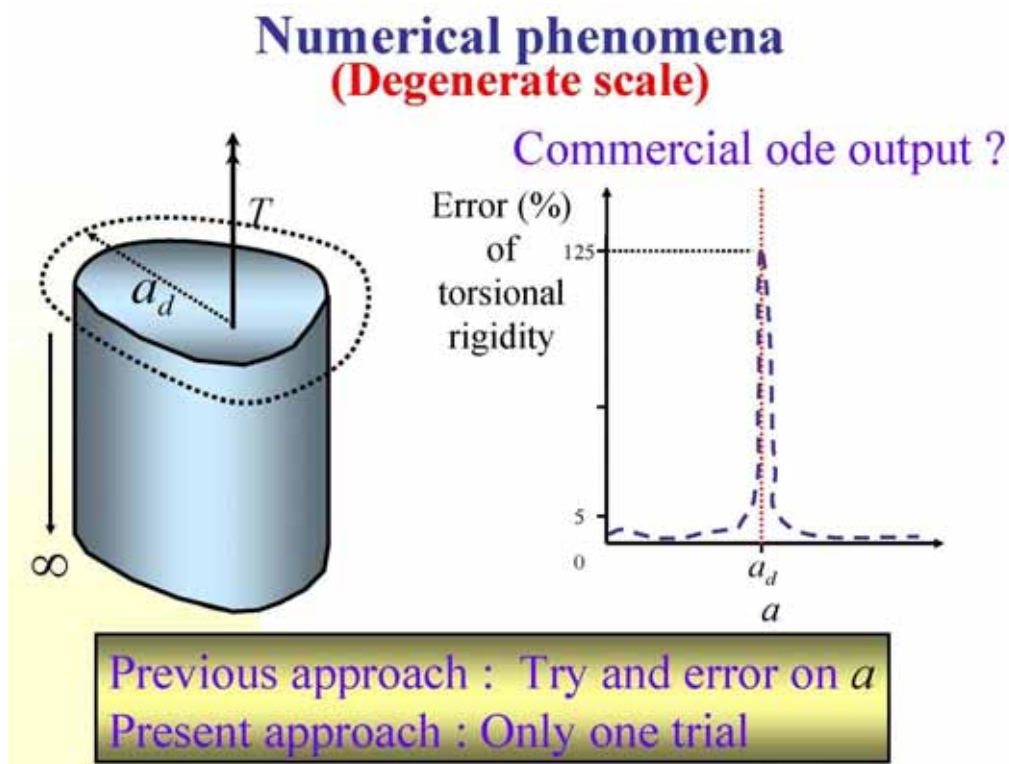


圖九 三種方法求解共振頻率結果比較圖

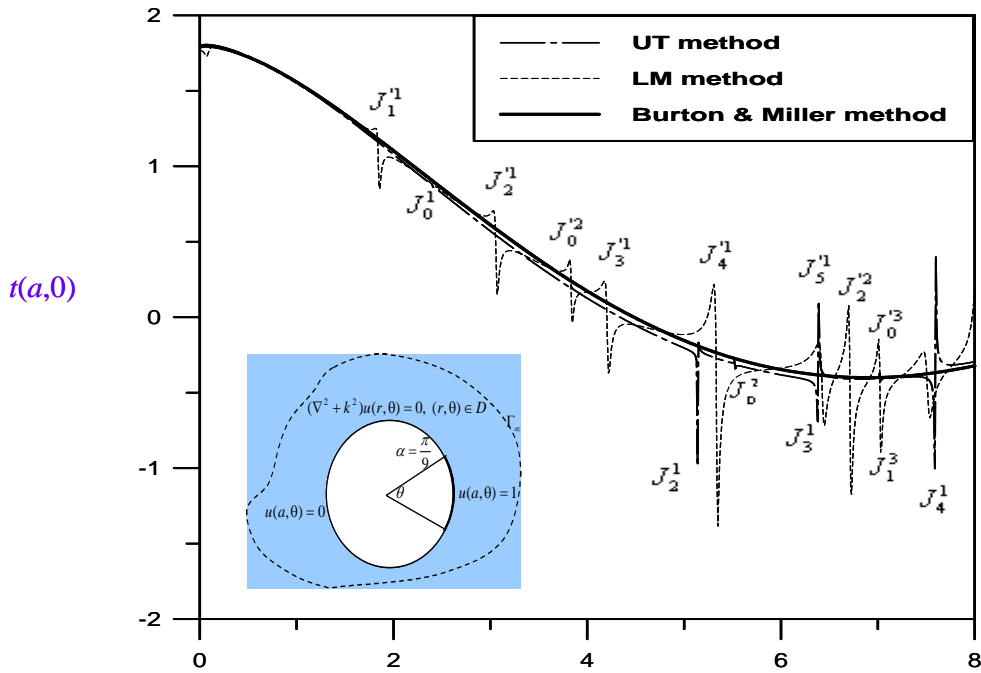
此法甚為麻煩。如欲解問題裡有多個退化邊界，則需切割成許許多多的子領域，在求解上問題會變的更為麻煩。因此，我們使用了對偶邊界元素法來求解，問題領域不需被切割，但需引入超奇異式，方可準確分析求得結果。近年來，我們更將此法改進到既不需對領域切割，也不需使用到對偶式的超奇異積分方程即可求解，關鍵在於引入奇異值分解法的技巧，其結果如圖九所示。

3. 退化問題

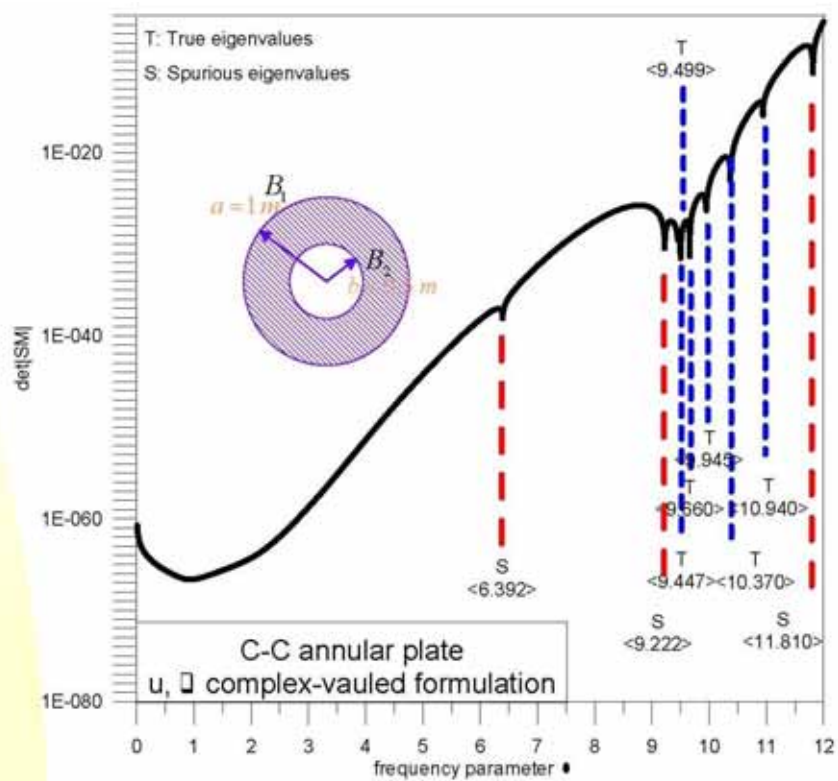
主持人將邊界元素法中退化邊界、退化尺度、外域虛擬頻率問題與多連通假根問題統一成秩減(rank deficiency)的數學現象。根據 Fredholm 二擇一定理與奇異值分解法的補充行與補充列技巧，提出一套瞭解與解決此類數值問題的統一理論。主持人亦於 2002 年 7 月在維也納舉行四年一次的第五屆國際計算力學會議，對此主題為”邊界元素法中退化問題”，作半小時的專題講座(keynote lecture)。如上一節所述，即為退化邊界問題，當問題邊界薄到僅剩一條線，即為退化邊界。圖十為退化尺度說明，當欲求解的問題領域大小到某一特定尺寸時，積分方程(邊界元素法)會產生解不唯一的現象。此特定尺寸即為退化尺度。圖十一為外域虛擬頻率問題，在求解外域問題中，在某些特定的頻率會產生數值不穩定現象。此一現象是因數值方法而引起，而非物理問題本身所產生，此稱虛擬頻率問題。在內域多連通問題中，當其在某些特定頻率會產生數值共振現。在真實物理現象中，並不會產生。而這些特定頻率，恰巧為其所對應單連通問題時，所產生的真實共振頻率，此即為多連通假根問題，如圖十二所示。



圖十 退化尺度問題



圖十一 外域聲場之虛擬頻率問題



圖十二 內域多連通假根問題

4. 微機電元件之分析研究：

電子元件上分析模擬應用：除了分析電子元的電子元件，例如：微帶結構、

平行板電容器與多層介電質材料內含金屬片問題進行電位與電場強度分析，而相關設計參數(例如：間距、介電質組成配方…等)對元件物理行為之影響亦會加以探討。至於在微機電元件上分析件之基本電學操作原理外，也將對偶邊界元素法在靜電學分析模擬之精確度上進行驗證工作，更針對常見模擬應用層面方面，除了靜電學於微機電系統致動元件上之應用外，微機電系統分析設計流程與數值分析模擬之挑戰亦有所涉獵，至於對偶邊界元素法與有限元素法於微機電系統元件分析適用性之比較亦作了深入探討。此外，以對偶邊界元素法求解微機電系統梳狀電極之靜電場問題、間距與飄浮力之關係探討、間距暨指寬比及行進距離與驅動力之關係探討、指寬比暨深寬比與飄浮負荷間之關係探討…等，均有相當完整之分析研究與探討成果。有關 Comb-drive 裝置與網格切割，詳見圖十三與十四所示。本研究成果已在國際知名 IEEE, J MEMS, JMM … 期刊發表。

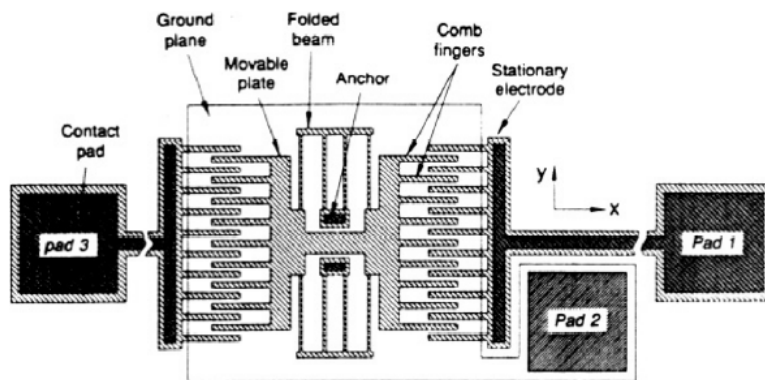
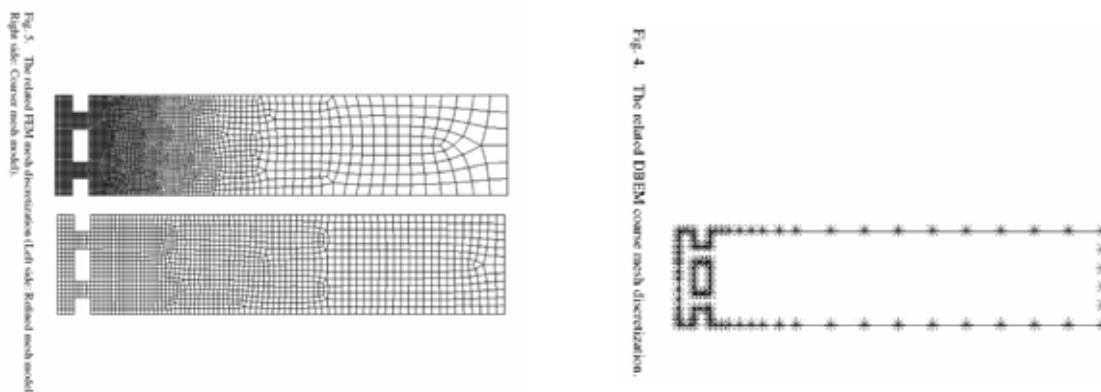


Fig. 1. Layout of a linear lateral resonator driven and sensed with interdigitated capacitors (electrostatic combdrive). [1].

圖十三 Comb-drive 裝置示意圖

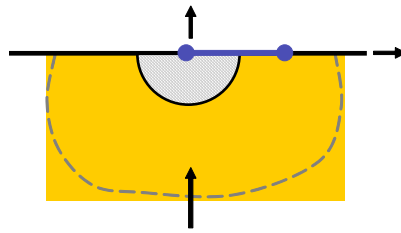


圖十四 元素切割示意圖

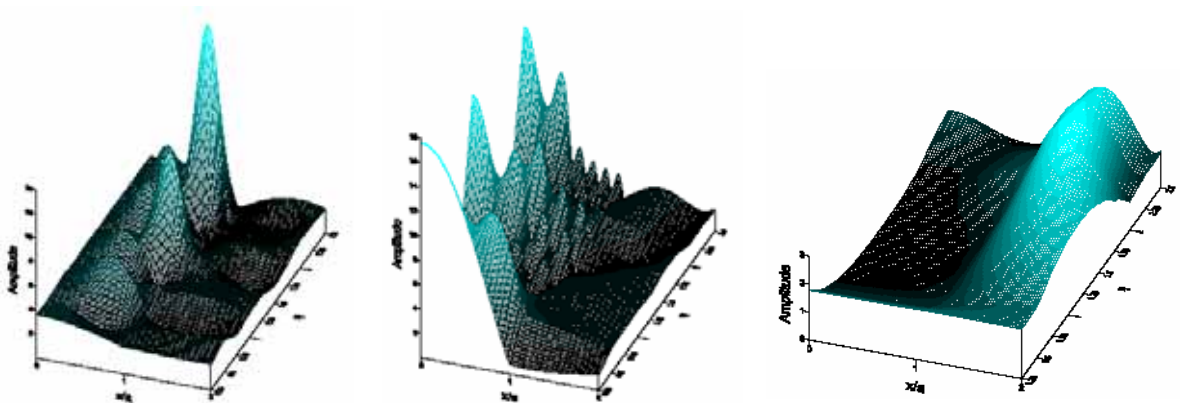
近年來，我們亦將我們發展的方法，成功的推展到平面電場與平面力學的壓電材料分析。

5. 地震工程的應用-盆地效應分析：

地表上一半圓形山谷盆地，受到一 SH 波影響，針對其盆地效應分析，我們可看出軟弱土層的盆地效應如圖十五所示，其地表振幅放大結果示於圖十六。



圖十五 半圓形盆地示意圖



$c_1/c_M = 1/2$ (中)

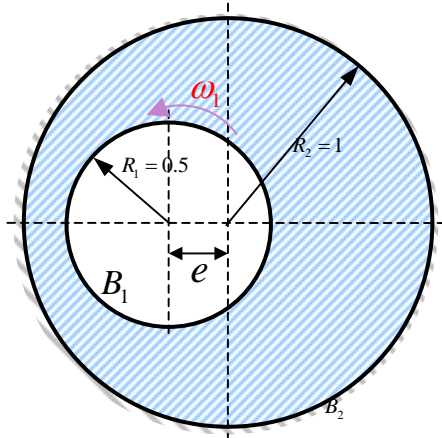
$c_1/c_M = 1/3$ (軟)

$c_1/c_M = 2$ (硬)

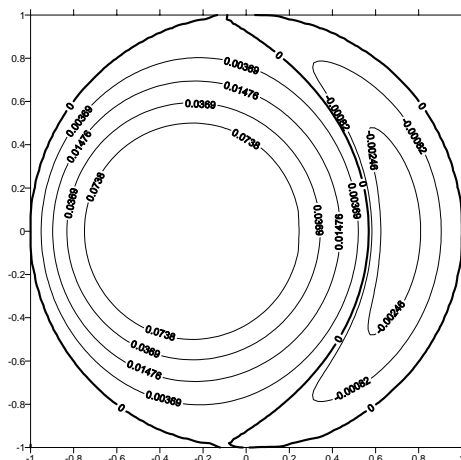
圖十六 不同介質造成之地表振幅示意圖(軟盆地振幅放大效應)

6. 計算流力的應用-史托克斯流問題：

此為求解一偏心圓之史托克斯流問題，圖十七為求解問題示意圖，圖十八則為流線分布圖。針對含圓形邊界的工程問題，我們可得五個優點：(1)免除奇異積分(2)無須元素切割(3)無邊界層效應(4)指數收斂(5)良態模式。



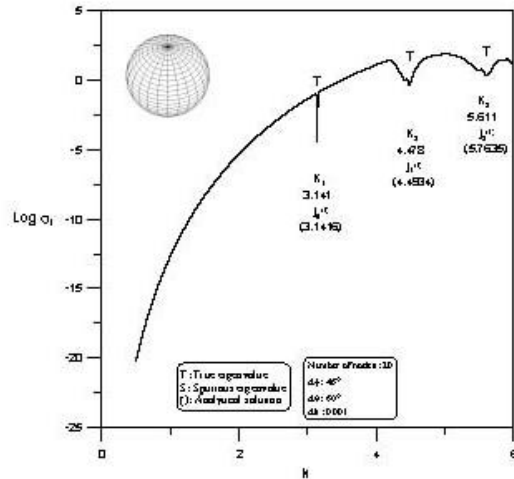
圖十七 史托克斯流問題



圖十八 流線分布圖

7. 三維空間聲場分析研究：

對於三維聲場的自然聲頻分析僅由邊上幾點(針灸療法)，即可預測出前三個共振頻率。圖十九顯示為三維空間聲場之共振頻率分析圖，圖上曲線掉落處所對應的頻率，即為共振頻率。圖二十為其共振頻率所對應之共振模態圖。



圖十九 三維空間聲場之共振頻率分析

	$n=0$ ($k=0.0$)	$n=1$ ($k=2.082$)	$n=2$ ($k=3.342$)
$m=2$			
$m=1$			
$m=0$			
$m=-1$			
$m=-2$			

圖二十 共振頻率對應之共振模態分析

四、結語與展望(含成果的未來的應用性或前瞻性)

本文根據我們在海大所發展的方法，實際應用到一些工程問題。所涵蓋領域非常廣泛，包括微機電、結構、熱傳、水利、大地工程、航空、土木與聲學…等。只要描述物理現象所統馭的數學機制掌握住，吾人不應該畫地自限，認為學結構就該做與結構相關之研究；學大地就只能接觸土壤與基礎，總以為跨領域是一件非常困難艱辛的事，釐清其背後控制的數學機制，自然能輕鬆發揮，揮灑自如。也期望能做到數學與工程結合，讓數學家有工程感覺；而工程師有數學的應用能力。我們也點出若干商業軟體所做出來的結果並不可靠，甚至是錯的。而其根本問題，即為數值方法中數學秩降解的不唯一問題。相信這些研究成果將對業界在使用商業軟體時，能及時提出一個警訊，方能不致誤判結果並做出錯誤的設計。

五、誌謝

感謝十餘年來國科會工程處土木學門與自然處數學學門的大力支持，方有以上成果與大家分享。不僅培育了兩位博士、近三十位碩士及若干學士，也與學生或其他研究人員，撰寫了上百篇的 SCI 論文。一路走來使得個人對計算方法有了更深入的瞭解與體認，也幫助了個人在學術與教學上的繼續成長。筆者很有幸能有這麼多同好來一起完成研究計畫，是為明處的貴人。在投稿與申請計劃期間，來自國內外審查人的寶貴指教與提攜，獲益良多，更是我無法當面誌謝的暗處貴人。更感謝海大提供一個良好的教學與研究的環境，以及有提攜之恩的洪宏基教授，並深深地感謝一路走來相伴學海的老師、同事及力學聲響振動實驗室並肩作戰的同學夥伴們，更感謝家人的體諒與支持，讓作者能無後顧之憂地專心做學術研究。也期勉往後的研究成果能在質與量繼續提升，而能有機會再與大家分享我們的研究成果。如讀者對於我們研究的成果感到興趣，歡迎至我們研究室的網頁 ([URL:http://ind.ntou.edu.tw/~msvlab](http://ind.ntou.edu.tw/~msvlab)) 參觀我們的成果。

六、作者簡介(含專長研究領域及重要職務或曾獲獎項)

1. 陳正宗 國立台灣海洋大學河海工程學系特聘教授

學歷： 國立台灣大學土木系學士

國立台灣大學應力所碩士

國立台灣大學土木所博士

經歷： 中山科學研究院助理研究員

國立臺灣海洋大學河海工程系副教授

國立臺灣海洋大學河海工程系教授(現職)

研究主題： 地震工程、振動與噪音、計算力學、邊界元素分析、反算問題、壓電力學、計算數學、數學教育、阻尼機制、有限元素分析、無網格式、主動控制、固體火箭發動機分析設計實驗

曾獲獎項：

國科會傑出研究獎(1999~2005)

第一屆海洋大學優良教師(2001)

第一屆國科會吳大猷先生紀念獎(2002~2005)

第一屆海洋大學特聘教授(2004~2007)

第一屆海洋大學學術成就獎(2005)

台大土木傑出校友獎(2005)

Email: jtchen@mail.ntou.edu.tw

URL: <http://ind.ntou.edu.tw/~msvlab>

2. 李應德 國立台灣海洋大學河海工程學系博士生

曾獲獎項：

第二十六屆全國力學會議學生論文競賽固力材料組第三名

Email: D93520002@mail.ntou.edu.tw