

# 边界元方法提取三维 VLSI 频变 电感（阻抗）

(申请清华大学工学博士学位论文)

培 养 单 位    计算机科学与技术系  
学        科    计算机科学与技术  
研 究 生    严 昌 浩  
指 导 教 师    王 泽 毅    教 授

二〇〇六年六月

边界元方法提取三维 VLSI 频变电感（阻抗）

严昌浩

# **Extracting the Frequency-dependent 3-D VLSI Inductance (Impedance) with Boundary Element Method**

Dissertation Submitted to

**Tsinghua University**

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

**Doctor of Engineering**

by

**Yan Changhao**

**( Computer Science and Technology )**

Dissertation Supervisor: Professor Wang Zeyi

**June, 2006**



## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

**（保密的论文在解密后遵守此规定）**

作者签名： \_\_\_\_\_ 导师签名： \_\_\_\_\_

日 期： \_\_\_\_\_ 日 期： \_\_\_\_\_



## 摘要

目前，VLSI 电路工作频率已达数 GHz，频变电感提取对高性能芯片电路设计变得十分重要和迫切。

最近，MIT 提出了基于直接边界元法并引入预校正快速傅立叶变换 (precorrected-FFT, pFFT) 加速的频变阻抗提取算法 (FastImp)。它能精确和高效地实现宽频范围阻抗提取任务，具有良好性能，但也存在两个问题：一是提取多频率点的阻抗时效率较低，二是未知变量数较多，达  $7-8P$ ， $P$  为面元数。本论文试图解决这两个问题，其创新性工作有如下三个方面：

第一，首次将完全多重互反方法 (Complete Multiple Reciprocity Method, CMRM) 应用于直接边界元电感提取，显著提高了多频率点电感提取效率。为克服 CMRM 公式在电感提取所遇到的数值困难，采取了一组有效算法，包括距离归一化、窗口技术、远场近似计算等。

第二，将完全多重互反方法 CMRM 与预校正快速傅立叶变换 (pFFT) 算法结合，并集成到基于直接边界元法的 FastImp 中，使多频率点电感提取在速度上明显快于原 FastImp，并具很高计算精度。另一方面，它将只能作远场快速计算且与频率相关的原始 pFFT 算法，改造为既能加速远场计算，又能加速近场计算且基本与频率无关的快速算法。

第三，提出一种混合边界元模型。在导体内，它利用虚拟的表面偶极子分布所产生的双层位势，以间接边界积分方程形式表达电场，而导体间（介质区域）仍采用直接边界积分方程形式表达电场。它可将变量数从  $7P$  降为  $4P$ ，显著缩小了线性代数方程组规模，具有潜在速度优势。数值结果验证了模型的正确性。

**关键词：** 三维阻抗（电感）提取；完全多重互反方法；直接边界元方法；混合边界元方法

## Abstract

With the operating frequency being already up to GHz in VLSI circuits, the frequency-dependent inductance (impedance) extraction becomes increasingly important and urgent to the on-chip or off-chip interconnects in high-performance circuit design.

Recently, the FastImp, based on the direct boundary element method (BEM) and accelerated by the precorrected-FFT (pFFT) algorithm, was implemented by MIT for impedance extraction. Although the FastImp can extract the 3-D wide-band impedance accurately and efficiently, it still suffers two drawbacks. The first is its inefficiency on extractions with multiple frequency points and the second is the enormous unknowns up to  $7-8P$ , where  $P$  is the panel number. This paper manages to solve the two problems respectively, and its originalities lie in the following three aspects.

First, the complete multiple reciprocity method (CMRM) was firstly applied in the direct BEM, for fast inductance extraction with multiple frequency points. In order to overcome the numerical difficulty deduced from the *ill-conditioned* power series in the CMRM formulae, a set of methods is proposed, including normalization of the distance, window technology, approximate formulae for the far fields and etc.

Second, combine the CMRM prototype mentioned above and the pFFT algorithm together, and integrate two combinational methods (two different combinational strategies) into the original FastImp. The combinational methods gain apparent advantage on speed over the FastImp and keep high accuracy. In fact, the combinational methods improve the original pFFT method, frequency-dependent and only accelerating the far field computation, into a new quick method, frequency-independent and accelerating both the far and near field computation.

Last, a mixed boundary element method is proposed for frequency-dependent inductance (impedance) extraction. Within each conductor, the electric field is expressed by the double layer potential, which belongs to a kind of indirect boundary integral equation (BIE) and is produced by the imaginary dipole distribution on conductor surfaces, while between all conductors (in dielectric), the electric field is



still expressed by the direct BIE used in the FastImp. The mixed method can cut the number of the unknowns from  $7P$  to  $4P$ , correspondingly reduces the size of the final linear system and will speed up solving it. Numerical results verify the correctness of this new method.

**Keywords:** 3-D inductance (impedance) extraction; complete multiple reciprocity method; direct boundary element method; mixed boundary element method

## 目 录

第 1 章 引言 .....	1
1.1 频变电感（阻抗）提取的必要性.....	1
1.2 现有电感提取方法.....	2
1.2.1 体积元方法（PEEC模型） .....	3
1.2.2 边界元素法 .....	5
1.3 论文工作和组织.....	6
第 2 章 直接边界元电感（阻抗）提取模型 .....	10
2.1 电感（阻抗）提取问题描述.....	10
2.2 边界元电感提取方法的基本步骤.....	11
2.3 控制方程和边界条件.....	13
2.3.1 控制方程 .....	13
2.3.2 边界条件 .....	14
2.4 边界积分方程推导.....	15
2.4.1 导体内矢量Helmholtz方程 .....	15
2.4.2 所有导体间满足的积分方程 .....	16
2.4.3 电流无散的积分形式 .....	17
2.4.4 电容边界积分方程 .....	18
2.4.5 边界积分方程小结 .....	18
2.5 离散为线性方程组.....	19
2.5.1 离散边界积分方程 .....	20
2.5.2 离散边界条件 .....	23
2.5.3 形成线性方程组 .....	24
2.6 后处理.....	24
第 3 章 应用CMRM快速提取多频率点电感原型.....	26
3.1 多频率点电感提取的提出.....	26
3.2 MRM和CMRM概述 .....	28
3.2.1 MRM和CMRM .....	28

---

3.2.2 MRM公式推导 .....	30
3.3 利用CMRM公式复用数值积分 .....	31
3.4 数值困难及其解决方法 .....	32
3.4.1 数值困难 .....	32
3.4.2 距离归一化 (normalization) .....	34
3.4.3 窗口技术 .....	36
3.4.4 远场快速近似计算 .....	37
3.4.5 近场积分的快速计算 .....	37
3.5 数值结果 .....	38
3.5.1 单导体算例 .....	38
3.5.2 Bus2x2 算例 .....	42
3.5.3 窗口大小和级数长度对精度的影响 .....	44
3.6 本章小结 .....	46
<b>第 4 章 结合CMRM和PFFT快速提取多频率点阻抗 .....</b>	<b>47</b>
4.1 CMRM原型中存在的问题 .....	47
4.2 预校正FFT方法 (pFFT) 简介 .....	49
4.2.1 pFFT方法的优势 .....	49
4.2.2 pFFT方法原理 .....	50
4.2.3 pFFT方法不足 .....	52
4.3 快速形成矩阵D的计算方法 .....	53
4.3.1 精确组合方式 .....	53
4.3.2 近似组合方式 .....	55
4.3.3 组合方法的优点 .....	56
4.4 数值结果 .....	57
4.4.1 圆环电感 .....	57
4.4.2 带衬底螺旋电感 .....	61
4.4.3 短接的长传输线 .....	64
4.4.4 内存比较 .....	66
4.5 本章小结 .....	67
<b>第 5 章 混合边界元电感提取模型 .....</b>	<b>68</b>
5.1 混合边界元模型 .....	68

5.1.1 直接边界元电感提取模型中的主要不足 .....	68
5.1.2 混合边界元模型 .....	69
5.2 超奇异积分计算.....	72
5.2.1 各种积分类型小结 .....	72
5.2.2 超奇异积分计算 .....	74
5.3 数值结果.....	75
5.3.1 单直导体 .....	75
5.3.2 Bus2x2 交叉导体结构 .....	78
5.3.3 时间比较 .....	80
5.4 本章小结.....	81
第 6 章 总结与展望 .....	83
6.1 总结.....	83
6.2 下一步工作展望.....	84
参考文献 .....	86
致谢与声明 .....	91
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 .....	92

## 第1章 引言

### 1.1 频变电感（阻抗）提取的必要性

在目前 VLSI 工艺下，90nm 线宽已成为主流，并逐渐向 65nm 工艺过渡，布线层数采用 6-7 层，工作频率已达 3-5GHz，设计规模的增长速度远超出 EDA 软件功能的提升速度，电路版图设计必须借助于功能强大 EDA 软件工具的支持。后电路模拟和验证是保证最终设计正确性的重要环节，其所需电学参数可从 VLSI 电路的几何版图中提取得到，这正是参数提取的主要功能。

电阻、电容和电感是决定电路性能的基本电学参数，它们或以元器件形式、或以互连寄生电磁效应形式存在于电路中。过去，电路工作频率较低，电感效应并不明显，大量研究工作集中在电容和电阻提取上。但今天，电路工作频率已达数GHz，电感效应对电路性能的影响正逐渐受到关注。从互连寄生电感对时延的影响看，1997年，Kahng提出了一种考虑电感的解析延迟模型<sup>[1]</sup>，计算结果与SPICE的结果差别仅在15%以内，但传统不考虑电感的Elmore延迟模型，其结果明显偏离了SPICE的结果。在文[2]，Yehea计算了CMOS门驱动的RLC传输线延迟，结果表明，若不考虑电感会带来35%的误差；而且更为严重的是，RC和RLC模型之间的差别将随着线宽的减小而增大。这表明，互连寄生电感效应已对信号的传输延迟产生强烈影响。

此外，互连寄生电感还可能产生振铃现象（ringing behavior）<sup>[3]</sup>，在互连线中产生各种毛刺<sup>[4]</sup>，影响信号完整性；互连线与衬底之间的寄生电感也会对信号产生干扰<sup>[5]</sup>，并通过衬底的耦合作用，使相距较远导体之间产生相互影响。Jeff等推导了高频下传输线瞬态响应表达式<sup>[6]</sup>，结果显示，在3GHz和10GHz频率下，RLC模型计算所得串扰电压峰值比常规RC模型高60%。这进一步说明，在高频下，互连寄生电感提取已是一个不容回避的课题。

另一方面，在VLSI模拟集成电路或微波/射频（RF）电路中，往往需要人为设计一些电感元器件，如：螺旋电感器等，对这些精心设计的电感器件同样需作精确的模拟和分析。同时，由于微波/射频电路通常工作频率极高，大量封装和引脚结构引起的高频寄生电磁效应也须作为互连寄生效应予以精确提取和分析。而且，由于电感（阻抗）是随频率变化的，这种分析往往需在多个频率点

上，而不仅仅是某一个或少量几个工作频率点上进行。

因此，对于片内（on-chip）和片外（off-chip）复杂的电磁场效应，应采用较为完整的电磁场建模，以期准确提取其中的频变电感（阻抗）参数，这是进行精确数值模拟的必要步骤。

## 1.2 现有电感提取方法

从电感提取模型的维度分类，现有方法可以分为 2-D/2.5-D和 3-D两大类。前者利用轴向平面场，将三维问题近似到垂直于轴线的平面上，以降低问题维度，但极大的形体约束使此类方法难以应用于实际复杂结构的电感提取中。它们通常应用于传输线问题<sup>[7][8]</sup>。本文不作讨论。

从所采用模型加以分类，3-D电感提取又可分为两大类：解析法和数值法。解析模型法以理论分析、实验测量或数值模拟的结果为基础，通过插值或曲线拟合等方法得到解析模型公式<sup>[9][10][11]</sup>。其优点是计算速度快，但缺点是精度较低，难以处理复杂三维结构。数值模型法通过求解由较完整Maxwell方程所描述的场来计算电感，因此也称场求解器（Field Solver）。虽然这种方法计算速度较低，一般难以胜任全芯片级提取任务，但是，它计算精度很高，能适应复杂的三维结构，例如：图 1-1 所示的 30 管腿结构就是这种实际复杂结构的例子。在许多类似的复杂结构中，数值方法是唯一可信结果的来源，并且，该方法在EDA软件建库过程中被广泛采用。

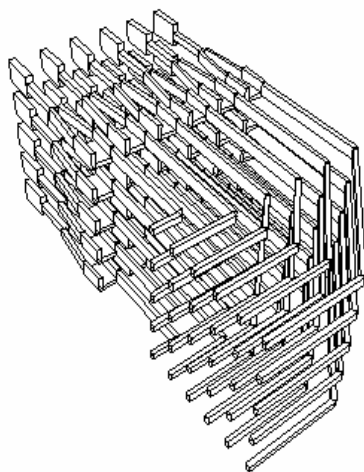


图 1-1 30 管腿结构示意图

三维电感提取数值方法也可大致分为两类：体离散化方法和边界元方法。体离散化方法又可进一步划分为两类：一类是基于传统的有限差分法（FDM）或有限元法（FEM）方法，它们需要对导体和介质所在的全体问题区域进行体离散<sup>[12]</sup>；另一类是仅需对导体区域进行离散化的体积元方法，以PEEC模型为其代表。近十几年来，后一类体积元方法由于其清晰的物理含义，稳定高效的数值计算性质受到极大关注。

下面对体积元方法和边界元方法加以简单介绍。

### 1.2.1 体积元方法（PEEC 模型）

Ruehli等于1972年将部分电感<sup>[13]</sup>概念引入互连寄生参数提取领域<sup>[10]</sup>，并于1974年提出著名的PEEC（Partial Element Equivalent Circuit）模型<sup>[14]</sup>。目前，以PEEC模型及其变种为基础的体积元法受到广泛关注<sup>[15][16][17]</sup>，已成为电感提取的研究热点之一。

体积元方法将导体区域离散化为电流细丝（filament），每一细丝上可定义三个方向电流分量（电感元），同时将导体表面离散化为面元（panel），每一面元上可有一个电位未知量（电容元），并最终将这些电感元和电容元视为电路元件以形成一个等效电路网络。这种将离散的电流细丝和面元直接转化为电路网络是部分元等效电路模型的核心想法。对于该电路网络中各个微小电路元件上的电学参数，则是通过解析公式计算得到，例如：电流细丝的电阻由导体直流电阻公式计算得到；电感则可通过空间两直导线间直流互电感的解析公式计算得到。这样，通过解析计算，可将该等效电路描述为一个确定的电学网络。对该电学网络，可采用各种方法（如：节点电压法、网孔电流法等）建立电路方程并求解。最后，通过后处理，累加电流细丝上的电流得到各个导体上电流大小，从而求出所需的电阻、电容和电感矩阵。该模型从较完整的Maxwell方程出发求解电磁场问题，具有较高的精度。

PEEC方法虽属体积元方法范畴，但它仅需离散导体区域，这与传统的有限差分、有限元等体离散方法需离散整个问题区域（导体和介质区域）相比具有明显的优势。这种优势使PEEC方法成为电感提取中非常重要的一种方法。近年来，体积元方法仍受到许多关注并不断得到改进，例如：2000年，上海交大的李征帆教授等在Ruehli等人研究工作基础上，提出了一种改进的PEEC模型<sup>[15][16]</sup>，1998年，Kamon提出了一种保证无源性的低阶电路模型<sup>[4]</sup>，1999年，Pileggi提

出了一种直接求解电磁场Maxwell方程的模型<sup>[18]</sup>, 2001年, Restle<sup>[19]</sup>将全波PEEC时域模型应用于全芯片互连延时分析, 提出了一种有效分析大规模问题的方法等。特别地, MIT的Kamon和J.White等人对PEEC模型作适当简化: 忽略导体表面电荷和位移电流(MQS假设), 并添加细丝电流均匀和沿轴向流动假设, 实现了著名的三维电感电阻提取软件原型FastHenry<sup>[17]</sup>, 由于每一细丝上仅有一个未知数, 从而大大简化了PEEC模型, 极大提高了三维电感电阻提取速度。当前, FastHenry采用精细网格离散下的结果往往被取作精度比较的标准。

但是, PEEC方法(FastHenry)仍存在明显不足。首先, 相比于仅需离散导体表面的边界元方法, PEEC方法毕竟属于体离散方法。其次, 体离散导致PEEC模型处理高频趋肤效应较困难。这是因为高频趋肤效应<sup>[20][21]</sup>使电流向导体表面集中, 而在导体中心电流很小。对于导体内这种电流严重不均匀现象, PEEC需在接近导体表面的区域作极精细的体离散才能准确提取其电感和电阻。特别地, 这种不同频率需要精细程度不同的离散使问题变得复杂, 尤其不利于模型降阶(Model Order Reduction, MOR)<sup>[22]</sup>, 而且, 精细离散使线性方程组规模上升, 效率下降, 此外, 尺寸差别太大的单元将导致计算结果不稳定<sup>[23]</sup>。第三, 由于FastHenry引入轴向电流假设, 它难以刻画高频下涡流、邻近效应所引发导体内复杂的电流分布。第四, 对于大块导体, 如衬底结构等处理困难、低效。图 1-2 给出一个利用体积元方法处理衬底的示意图, 从图中可以看到, 用体积元方法处理此类问题非常缺乏效率<sup>[22]</sup>。最后, FastHenry仅能进行磁准静态(magnetoquasistatic, MQS)分析, 而不能进行更为复杂的电磁准静态(electromagnetoquasistatic, EMQS)和全波分析(fullwave analysis), 即难以求解更完整Maxwell方程组。

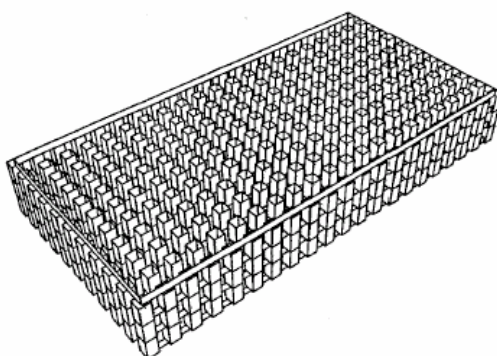


图 1-2 衬底结构离散示意图[22]



### 1.2.2 边界元素法

边界元素法 (Boundary Element Method, BEM) 是将微分方程转化为边界积分方程 (Boundary Integral Equation, BIE), 然后利用矩量法<sup>[24]</sup> (Moment of Method, MoM) 离散为线性方程组的一种偏微分方程数值解法。边界元方法已被广泛应用于弹性力学、断裂力学、流体力学、电磁场和热传导等领域的科学和工程技术计算中<sup>[25][26][27]</sup>。常用的边界元方法可大致分为直接边界元和间接边界元两种。它们之间的主要差别在于将微分方程转化为积分方程过程中, 所采用边界变量及相关积分公式不同。

1999年, 直接边界元电感提取模型由麻省理工学院 (MIT) 的Wang Junfeng等提出<sup>[22][28]</sup>。该模型不仅适用于全频率范围电感 (阻抗) 提取, 也能用于MQS、EMQS假设和全波分析。在上述工作基础上, 2003年, 文献 [29]、[30]和 [31]在数值计算和模型上加以改进, 并实现了一个软件原型FastImp<sup>[32]</sup>。与体积元方法相比, 边界元方法除了拥有将问题维度由三维降为二维这一重要优点外, 还具有如下优点:

- 1) 边界元方法仅需离散导体表面, 大大增强了处理三维任意复杂几何形状互连结构的能力;
- 2) 特别适合衬底等大块导体结构。在考虑衬底的电磁耦合效应时, 体积元方法需对衬底区域作体离散, 而边界元方法仅需离散衬底表面, 这将有效减少变量数, 加快计算速度;
- 3) 高频情况下, 体积元方法须对贴近导体表面区域作密集离散来刻画趋肤效应, 而数值结果显示, 边界元方法不同离散下的结果, 对频率并不敏感<sup>[22]</sup>。
- 4) 若采用模型降阶方法, 可极大降低计算规模<sup>[33]</sup>。体积元方法在高频段要求精细划分, 意味着在整个频率范围内都要求精细划分, 降低了模型降阶方法的效果<sup>[4]</sup>; 而边界元模型法在整个频率范围内都可采用一种划分 (且对频率不敏感), 因此, 更适合采用模型降阶方法<sup>[22]</sup>;
- 5) 在速度上, 在大致相同精度的情形下, FastImp一般比FastHenry快 2-3 倍 (低频下) 到几十倍 (高频下)<sup>[22]</sup>;
- 6) 从实际可用原型的功能上, FastImp 能作 MQS、EMQS 和全波分析, 而FastHenry 仅能作 MQS 分析。

因此, 边界元电感提取方法非常有竞争力。但目前研究尚不充分, 相关文献较少。对于直接边界元法而言, 还有一个明显缺点是它的变量数目太大, 约达

7-8 $P$ ,  $P$  为导体表面离散面元的总数。这使得, 即使对于中等规模的问题, 也会因线性方程组规模膨胀太快而难以求解。

本课题组在 2002 年提出了一种电感提取间接边界元模型<sup>[34][35]</sup>。它对导体内磁场采用称为“最小阶”(Minimum-order)的间接边界积分方程表达。这种虚拟面电流源分布由Mayergoyz在他的经典文献 [36]中提出, 用于描述三维涡流问题的磁场。其后, 文献 [37]与 [38]改进了该方法, 通过考虑面电流仅在导体表面切向存在的物理特性, 将三分量面电流假设简化为两切向分量面电流假设(局部坐标下), 从而将每个面元上的变量数目从 3 个减少到 2 个。在介质中, 文 [34]采用了二阶矢量磁位(Second Order Vector Potential, SOVP)表达磁场所满足的矢量Laplace方程<sup>[39][40][41][42]</sup>, 它的特点是能将矢量Laplace方程仅用一个标量未知数表达, 而一般方法需引入三个标量变量以表达该矢量方程。最后, 在导体-介质交界面上耦合导体与介质磁场建立方程组, 从而得到一种能将每个面元上变量数目减少到仅 3 个的间接边界积分方程方法。变量数目少, 是这种间接边界元方法的主要优势。但是, 该方法仅能处理任意截面的直导体, 对形体几何约束严格, 不太适用于实际三维复杂结构的电感提取。

本文工作均在边界元方法上展开, 有关边界元方法, 特别是直接边界元方法的细节将在后续章节中详细介绍。

### 1.3 论文工作和组织

目前, FastImp 虽是一个领先、快速、能适应宽频率范围和可作全波分析的电感提取原型, 但也存在两个重要缺陷。首先, 尽管得益于 pFFT 加速技术, 使它在提取单一频率点阻抗时非常高效, 但在提取多频率点的阻抗时却非常低效。这是因为, pFFT 加速技术虽然极大提高了远场计算效率, 也有助于在多频率点计算时能共享某些信息, 但由于其中可供复用部分所占时间比重很小, 使它在每个频率点上的计算近乎逐次反复运行程序。第二, 由于 FastImp 采用直接边界元模型, 其变量数目达到 7-8 $P$ , 当面元  $P$  的数目较大时, 方程组规模将急剧膨胀, 即使对中等规模问题, 也会因方程规模巨大而带来数值计算上的许多困难。为此, 本文工作集中在解决上述两个问题, 其创新工作体现在如下三个方面:

第一, 针对多频率点电感提取问题, 本文在提出一组克服数值困难的方法后, 将完全多重互反方法(Complete Multiple Reciprocity Method, CMRM)引入直接边界元电感提取中, 能显著提高多频率点电感提取速度。

多重互反方法 (Multiple Reciprocity Method, MRM) 是一种新的边界元方法。在振动、声学等领域, 它被广泛应用于 Helmholtz 方程封闭腔的特征值计算问题。由 Helmholtz 微分方程得到直接边界积分方程时, 积分核函数一般为 Helmholtz 方程基本解及其导数形式, 其中, 与频率相关的波数  $k$  被包含于积分运算中, 当  $k$  取不同值时, 离散化边界积分方程所需的大量费时数值积分必须重新计算。这对求取  $k$  的特征值问题非常不利。为此, 人们提出一种新的多重互反边界元方法。不同于传统做法, 它采用 Laplace 方程高阶基本解代替 Helmholtz 基本解, 在证明其收敛性后, 建立边界积分方程。Laplace 方程高阶基本解为级数形式, 级数中的每一积分项为仅依赖于空间几何关系的量, 而与波数  $k$  无关。因此, 级数中各项数值积分仅需计算一次, 可大幅度减少特征值计算中系数矩阵生成时间。

但是, 在特征值问题中, 多重互反方法遭遇“伪特征值”问题。更深入的研究表明, 多重互反公式仅表达了 Helmholtz 复值公式的实部。随后, 研究者们提出了各种方法识别并排除伪特征值。其中, J. T. Chen 等人提出了一种完全多重互反公式, 并证明其等价于 Helmholtz 复值公式, 且保持有多重互反公式中积分与  $k$  无关的优点, 很好解决了伪特征值问题。

由于特征值问题与多频率点电感提取有相似之处, 本文试图将 CMRM 方法引入到 VLSI 电感提取中。虽然在原理上, 这并不存在太多困难, 但在实际应用中却遇到严重的数值困难。这是因为, MRM 和 CMRM 公式均为“病态级数”<sup>[43]</sup>, 对于电感计算中大的波数  $k$  或大的距离  $r$ , 这些级数中数值很大的项会出现“两两相消”现象, 并最终导致级数部分和严重偏离准确值。但是, 此类问题在特征值计算问题的相关文献中并未提及。

为此, 我们提出了一组克服该数值困难的方法。首先, 针对距离  $r$  变化范围大的问题, 采用距离归一化 (normalization) 技术, 即将积分中距离  $r$  均变换到 1.0 附近。其次, 引入窗口技术, 将场计算划分为远场计算和近场计算两部分。对于近场计算, 也就是  $kr$  较小的情形, 可采用 CMRM 级数公式, 仅用较少的部分和项数  $N$  就可安全、准确加以计算。而对于远场计算, 引入一组快速的近似公式进行计算。这里需指出, 窗口大小的确定及远场近似计算均源自一定物理背景, 即: 在导体内, 由于电磁场的快速 (指数) 衰减, 远场计算精度对最终结果影响不大。最后, CMRM 迭代形式的公式使得计算  $N$  项积分与仅计算一项在速度上没有太大差别, 保证了整体的提取速度。

在采用该套方法后, CMRM 方法能被应用于实际大规模 VLSI 电感提取问题

中。数值试验表明，在绝大部分情形下，该方法能保证相当高的计算精度，而在多频率点问题上，其潜在的速度优势也可从试验数据中明显观察到。

第二，将上述原型与预校正快速傅立叶变换（**precorrected-FFT, pFFT**）算法结合，并集成到 **FastImp** 中，在多频率点电感计算上取得明显优于原 **FastImp** 的速度结果。

应当指出，上述 **CMRM** 电感提取原型存在几个不足之处：

- 1) 在速度上，该原型与 **FastImp** 存在数量级的差别，这主要是由于缺少快速算法和类似 **GMRES** 快速线性方程组迭代求解器的支持；
- 2) 内存开销巨大。这是因为，尽管仅需对近场计算作级数展开，但实际上，由于低频时近场窗口往往很大，足以覆盖整个问题区域，最终，还是对整个区域作了级数展开；
- 3) 通用性较差。这是因为对于不同的积分核，不易寻找不同的远场近似计算公式；
- 4) 在极高频率或者电大尺寸的粗糙离散下，计算精度较差。这是 **CMRM** 原型中较为严重的一个问题。

为此，我们将 **CMRM** 电感提取原型与预校正快速傅立叶算法结合起来。实际上，**CMRM** 方法由于其数值困难，仅适用于近场范围，属于一种近场快速算法。因此，在实际应用中，必须补充适当的远场处理方法，例如：在上述 **CMRM** 原型中，补充了一组远场快速计算公式。相反，**pFFT** 方法本质上仅是一种远场快速算法，它对近场的处理只是最原始的直接计算。因此，将快速计算近场的 **CMRM** 方法和快速计算远场的 **pFFT** 方法结合在一起，以组合成一种新的快速方法是自然与合理的。

本文实现了两种组合方式，一种是在全频率范围内，能保证可靠计算精度的所谓精确组合方法，而另一种是误差稍大，但具更高计算速度的近似组合方法。在技术细节上，组合时仅需要考虑 **CMRM** 窗口和 **pFFT** 窗口之间的关系，在不同区域内，选用不同的积分计算框架。另外，在近似组合方法中，需考虑近奇异积分（**nearly singular integral**）对结果的影响。当前，已将这两种组合方式集成到 **FastImp** 原型中。多个数值实验证实了两种组合方式的实际效果。它们均能保持较高精度的同时，在速度上明显优于 **FastImp**，并能较好克服上述 **CMRM** 电感提取原型中的 4 点不足。

事实上，以上组合方法是将仅能加速远场、与频率相关的原始 **pFFT** 方法本

身扩展为一种能同时加速远场和近场计算、且基本与频率无关的快速方法；并且，由于 pFFT 方法本身通用性较强，使得该组合方法也具有一定的通用性，对已使用了 pFFT 加速技术的其它工程应用具有一定参考价值。

第三，提出一种混合边界元模型，它能将变量数目从  $7P$  降为  $4P$ ，显著减小了离散化方程组的规模。

一般而言，在边界元方法中，间接法会比直接法少约一半的变量数目。FastImp 属于直接边界元电感提取模型；而到目前为止，尚未有成熟的、能适应复杂三维结构的间接边界元电感提取模型。

本文提出一种将直接法和间接法相结合的所谓混合边界元电感提取模型。它的基本思路是在每个导体区域内，对电场采用以边界表面虚拟偶极子为源的双层位势表达，它为一种间接边界积分方程形式，而在介质区域（所有导体之间），对电场则采用 FastImp 已使用的直接边界积分方程形式表达，同时使用这两种不同类型边界积分方程便得到一种混合边界元模型。尽管这种混合模型不再是“单纯”间接边界元方法，但它依然具有间接边界元方法变量数目少的优点，能将变量数目从  $7P$  降低为  $4P$ （MQS 假设下）， $P$  为面元数目。并且，如同 FastImp 一样，它能适应三维复杂结构、宽频率范围内的电感提取任务。尽管此模型需要更多的时间用于更高阶的数值积分，但若同 FastImp 的“新公式”相比，则可在不增加积分计算的成本下，取得将变量数目几乎减少一半的优势。两个互连结构的算例验证了本模型的正确性，并已显示出变量数减少后所带来的潜在速度优势。

论文余下部分如下组织：第二章介绍 FastImp 所采用的直接边界元电感提取基本原理，其中内容在后续三章中常被引用，也是全文的基础；第三章介绍采用 CMRM 方法提取多频率点电感问题的基本思想，并详细讨论如何克服原有 CMRM 公式在电感提取中遇到的数值困难；第四章介绍 CMRM 原型和 pFFT 结合的方法，并给出详细数值试验结果以说明该方法的性能与特点；第五章介绍混合边界元模型；最后是结论与展望。

## 第2章 直接边界元电感（阻抗）提取模型

本论文内容均以 FastImp 中所采用的直积边界积分方程为基础，或与之紧密相关。为完整性，本章将详细介绍该模型所用基本方程，以便后续章节中引用。

### 2.1 电感（阻抗）提取问题描述

电感（阻抗）提取面临如下物理问题：已知若干导体、介质的几何版图、物理参数，包括导体的电导率，介质的介电常数，它们的磁导率等，需求取任意两导体之间的电感（阻抗）参数。为此，通常需在某些导体面上强加频率为  $f$  的正弦激励或接地，这些导体面被称为端口（port）或接触面（contact surface）。因此，形式上，电感提取可视作将空间几何结构和物理模型转化为以接触面为端口的多端口电学网络后，求取该网络中电学参数的场计算问题。

图 2-1 形象地说明了电感提取的计算过程。图中是含  $M$  个导体的互连结构，在每根导体两端强加频率为  $f$  的正弦电压  $V$ ，该端面即接触面，其余导体面称为交界面或非接触面。通常，某一导体上的偏压置为 1 伏，并称该导体为主导体，而其余导体上偏压均为 0 伏（接地）。

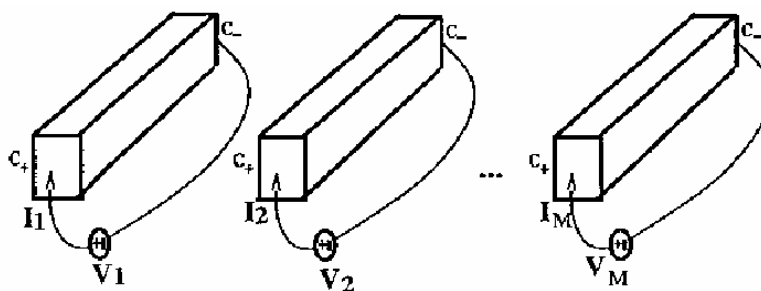


图 2-1 多导体结构电感提取示意图[22]

若在某一偏压设置下，所有导体内电流均已求出，便可将其表达为一个电流列向量，并记为  $I_1$ 。然后，选取另一导体为主导体及设置偏压，并再次计算出所有导体内电流，依此类推，可得到各电流列向量  $I_2, \dots, I_M$ ，最终，组合为完整的电流矩阵  $I = [I_1, I_2, \dots, I_M]$ 。由此电流矩阵  $I$ ，便可计算出所需阻抗矩阵  $Z$ 、电阻矩阵  $R$ 、（等效）电感矩阵  $L$  分别为：

$$Z = I^{-1}, \quad R = \text{real}(Z), \quad L = \text{imag}(Z)/i\omega \quad (2-1)$$

其中，阻抗  $Z$  为复数矩阵， $\text{real}$  和  $\text{imag}$  分别表示复数取实部和虚部的算子， $\omega = 2\pi f$  为角频率。通常，每个导体有两个端口，因此，得到的阻抗、电阻、电感均为  $M \times M$  的方阵。

这样，电感提取问题便转化为：如何通过已知偏压设置计算出每个导体的电流。概括地说，通过求解 Maxwell 偏微分方程组以求解电场并得到导体内电流，这种三维电感提取方法属于一种场求解器方法。

## 2.2 边界元电感提取方法的基本步骤

采用边界元方法计算电感可大致分为如下几个基本步骤，如图 2-2 所示。

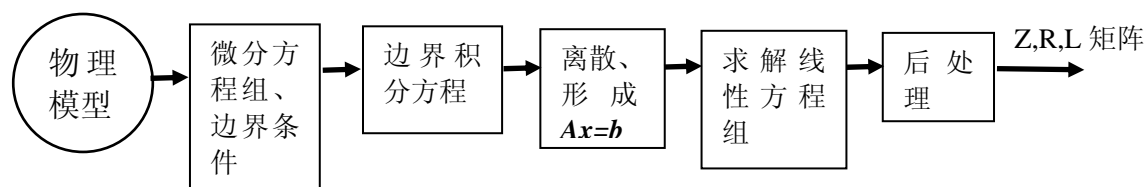


图 2-2 电感提取边界元方法的基本步骤

首先，由物理模型得到问题域的微分方程组和边界条件。在电容提取中，从物理模型转换到数学模型较易。如在静电场模型下，电位在介质场域内满足 Laplace 方程，在边界上分别满足第一类（导体-介质交界面电位  $\varphi$  已知）、第二类（强加  $\partial\varphi/\partial n = 0$ ）和交界面条件（介质-介质交界面电位  $\varphi$  连续，法向电位移矢量  $\bar{D}$  连续）。由这些确定物理结论，易将电容提取问题转化为数学上完整定义的 Laplace 方程边值问题（场域控制方程和边界条件）。但电感提取问题却复杂许多。由于原始 Maxwell 方程组、边界条件和结构（成分）方程，以及导出的微分方程、位函数、边界条件等数目众多，它们之间关系复杂且存在许多隐式推导而并不完全独立<sup>[44][45][46]</sup>，因此，选择合适微分方程组和边界条件，使方程间满足独立、自洽、未知数匹配、能适应电感提取要求并不容易。此外，由于 VLSI 电路中电感效应往往在高频下较明显，而高频下趋肤效应、邻近效应和返回路径不确定等问题<sup>[20][21]</sup>也给电感提取建模带来困难。从物理模型上，即使在最为简化的

MQS假设下，电感提取也须求解接近完整Maxwell微分方程组<sup>①</sup>。但文献 [22]创造性工作给该步骤提供了一种可行方法。

第二，将场域控制微分方程转化为边界积分方程。对于齐次椭圆微分方程，一般较易将其化为直接边界积分方程<sup>[47]</sup>，但对于非齐次椭圆微分方程则困难许多，这是由于非齐次项常会在积分方程中导出体积分项，而离散含体积分的积分方程需对问题区域作体离散，从而丧失边界元方法最重要的优势。依据转换的方法（积分公式与边界变量）以及结果不同，边界元方法常可大致分为直接法和间接法两类。FastImp属于直接边界元方法。它利用Green第二恒等式，仍以原偏微分方程中所使用的物理变量 $(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial n}, \varphi)$ 作为边界变量，将微分方程化为边界积分方程；而间接法则需在边界上寻找合适的虚拟源，利用位势理论构建单或双层位势来表达待求场域内的场分布。

第三，在离散导体表面后，常利用点配置方法（collocation method）将积分方程转化为矩阵形式，并组合为大型线性方程组  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 。

第四，求解线性方程组  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 。目前，有大量求解大型线性方程组的技术，工程上常采用预条件的 GMRES 迭代求解技术。

最后，后处理（post-process）。它通过已解出的线性方程组结果  $\mathbf{x}$ ，计算各个导体电流，从而得到阻抗  $\mathbf{Z}$ 、电感  $\mathbf{L}$ 、电阻  $\mathbf{R}$  矩阵等。

FastImp作为一种重要的直接边界元电感提取模型，本章余下部分将详细介绍其中几个步骤：如何选择微分方程组和边界条件；如何转化为边界积分方程；以及如何离散并形成线性方程组。后处理部分仅作简单介绍。另外，FastImp中采用了一种重要的快速计算方法pFFT，将在第4章中作介绍。算法实现中重要的积分方法（归化为一维数值积分的普通积分和奇异积分处理）以及预条件GMRES线性方程组迭代求解技术将不作介绍，相关内容请参阅文献 [22][32]和FastImp源码<sup>[48]</sup>。

<sup>①</sup>正是因电感提取实际上非常接近于求解完整 Maxwell 方程组（全波分析），而文中方法均可适用于全波分析，所以文中电感提取和阻抗提取不加区分。



## 2.3 控制方程和边界条件

### 2.3.1 控制方程

微分形式的时谐Maxwell方程组为<sup>[49]</sup>:

$$\nabla \times \bar{E} = -i\omega\mu\bar{H} \quad (2-2)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + i\omega\varepsilon\bar{E} \quad (2-3)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2-4)$$

$$\nabla \cdot (\mu\bar{H}) = 0 \quad (2-5)$$

其中， $\mu$  为磁导率， $\varepsilon$  为介电常数，在电感提取问题中均设为常数。

此外，导体内满足欧姆定律：

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \quad (2-6)$$

其中， $\sigma$  为电导率，对每一个导体而言为常数。

可以证明，在导体内和无损介质中（导体外），均有<sup>[22]</sup>：

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (2-7)$$

对式(2-2)两端作旋度运算，考虑到 $\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E}$  和  $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ ，并代入(2-3)，可得到，在每一个导体内电场 $\bar{E}$ 满足的矢量Helmholtz方程：

$$\nabla^2 \bar{E} - (iK_1)^2 \bar{E} = 0 \quad (2-8)$$

其中： $K_1 = -\sqrt{-i\omega\mu\sigma_k + \mu\varepsilon\omega^2}$ ， $\sigma_k$  为第 $k$ 个导体的电导率。式(2-8)为导体内电场 $\bar{E}$ 满足的一个重要方程。

式(2-8)可以重写为：

$$\nabla^2 \bar{E} - (iK_0)^2 \bar{E} = i\omega\mu\bar{J} \quad (2-9)$$

其中， $K_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。式(2-9)是所有导体之间满足的另一个重要方程。

另外，将Maxwell方程用标量电位 $\varphi$ 和矢量磁位 $\bar{A}$ 表示。利用 $\nabla \cdot \bar{A} = -i\omega\varepsilon\mu\varphi$ （Lorentz规范）和 $\mu\bar{H} = \nabla \times \bar{A}$ ，以及

$$-\nabla\varphi = \bar{E} + i\omega\bar{A} \quad (2-10)$$

$\bar{A}$ 和 $\varphi$ 的微分方程可表达为：

$$\nabla^2 \vec{A} - (iK_0)^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2-11)$$

$$\nabla^2 \varphi - (iK_0)^2 \varphi = -\rho / \varepsilon \quad (2-12)$$

其中，电荷  $\rho$  仅分布于导体表面。

综上，电感提取中需用的重要场域控制方程为 (2-7)，(2-8)，(2-9)，(2-12)，推导中需辅助使用的方程为(2-10)，(2-11)。上述  $K_0$ ， $K_1$  适用于全波分析，若为磁准静态和电磁准静态假设， $K_0$ ， $K_1$  均可相应简化，如表 2-1 所示。在MQS和EMQS假设中， $K_0 = 0$  表明式(2-11)和(2-12)成为矢量Poisson方程。在MQS假设中，还有导体表面电荷  $\rho = 0$ ，由此，式 (2-12)进一步退化为Laplace方程（电容方程）。此时，在实际计算中并不需设未知电荷密度  $\rho$ ，也不需方程 (2-12)。所以，在MQS假设下，电容方程和电感（阻抗）计算是解耦的。

表 2-1 MQS、EMQS 和全波分析中  $K_0$  和  $K_1$  的选取

假设类型	内容描述	$K_0$	$K_1$
MQS 假设	忽略位移电流、 忽略导体表面电荷	0 且 $\rho = 0$	$-\sqrt{-i\omega\mu\sigma_k}$
EMQS 假设	忽略位移电流	0	$-\sqrt{-i\omega\mu\sigma_k}$
全波分析	完整 Maxwell 方程组	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$-\sqrt{-i\omega\mu\sigma_k + \mu\varepsilon\omega^2}$

### 2.3.2 边界条件

对于电压已知的接触面和导体-介质交界面（非接触面），存在不同类型的边界条件。

在导体-介质交界面，由电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \vec{J} = -i\omega\rho$$

可得到边界条件<sup>[29][50]</sup>：

$$E_n(\vec{r}) = \frac{i\omega\rho(\vec{r})}{\sigma} \quad (2-13)$$

该边界条件仅能提供一个标量条件，远不足每个面元上未知数。在导体-介质交界面上，另三个标量边界条件较特殊，将在推导积分方程时说明。

在接触面上，假设电流“垂直注入”导体，即切向电流为 0，可得：

$$\vec{t}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2-14)$$

其中， $\vec{t}$  代表接触面局部坐标下两个单位切向分量 $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ 。同时，由该假设和电场无散条件，可导出<sup>[29]</sup>：

$$\frac{\partial E_n(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} = 0 \quad (2-15)$$

其中， $\hat{n}$  是接触面上单位外法向量。

另外，接触面上电位已知，即：

$$\varphi = constant \quad (2-16)$$

所以，式(2-14)、(2-15)和(2-16)共提供了 4 个标量边界条件，后面将看到，它们是完整的。

## 2.4 边界积分方程推导

本节讨论如何将上述微分方程转化为直接边界积分方程。

### 2.4.1 导体内矢量 Helmholtz 方程

在每一导体内，电场 $\vec{E}$ 满足矢量Helmholtz方程，即式(2-8)，由Green第二恒等式<sup>[50]</sup>，对导体内任意一评价点 $\mathbf{y} \in V_k$ ，满足如下并矢边界积分方程：

$$\int_{S_k} G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \vec{E}(\mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} - \int_{S_k} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} \vec{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \vec{E}(\mathbf{y}) \quad (2-17)$$

其中， $S_k$  和  $V_k$  分别是第  $k$  个导体表面和体积区域，并有：

$$G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{e^{iK_1 r(\mathbf{y}, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}, \mathbf{x})} \quad (2-18)$$

其中， $r(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  是点  $\mathbf{y}$  与点  $\mathbf{x}$  之间的欧氏距离， $K_1$  依不同假设类型选用表 2-1 中的表达式。

式(2-17)为边界积分方程，它将导体内任一点处电场和该导体内边界上电场及电场法向导数联系起来。而当点 $\mathbf{y}$ 移动到导体内边界 $S_k^-$ 上时，式(2-17)就变成仅涉及导体表面电场及其法向导数的并矢边界积分方程。

需要注意的是，当评价点位于积分面元内部时，Green函数积分  $\int_{S_k} G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  和  $\int_{S_k} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x}$  变为含不同奇性的奇异积分，均需特殊处理。特别地，对于  $\int_{S_k} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x}$  的奇异积分，实际上包含有主值积分和附加项。在式 (2-17) 中，这种奇异性含在积分中没有移去。

实际应用中，该并矢边界积分方程被分解到全局坐标下的  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  三个方向上，因此，它能为所有面元提供三个标量方程。

### 2.4.2 所有导体间满足的积分方程

考虑所有导体构成的并域，如图 2-3 所示。对导体内任意一点  $\mathbf{y}$ ，应用Green第二恒等式，微分方程(2-9)可以转化为如下边界积分方程：

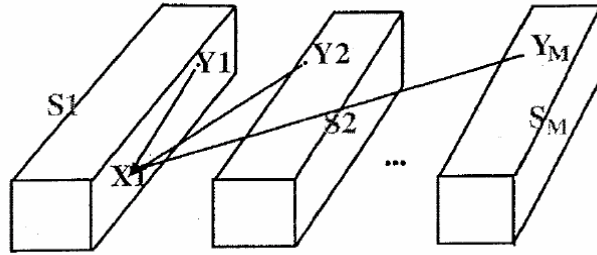


图 2-3 导体之间积分方程推导示意图[22]

$$\int_S G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} - \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) + i\omega \int_V \mu G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{J}} d\mathbf{x} \quad (2-19)$$

其中， $S$  和  $V$  分别为所有导体所构成并集的表面和体积区域，并有：

$$G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{e^{iK_0 r(\mathbf{y}, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}, \mathbf{x})} \quad (2-20)$$

而  $K_0$  依不同假设类型选取表 2-1 中相应表达式。

由式(2-11)可以得到：

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = \int_V \mu G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2-21)$$

并考虑到式(2-10)，式(2-19)可改写为：

$$\int_S G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \vec{E}(\mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} - \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} \vec{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \nabla \varphi(\mathbf{y}) = 0 \quad (2-22)$$

当点 $\mathbf{y}$ 移动到导体内表面时，式(2-22)就变成并矢边界积分方程。它刻画了所有导体内表面处的电场、电场法向导数和标量电位梯度之间的关系。同样，发生奇异时，积分中的奇性没有移去。

在应用中，该并矢积分方程仅在导体-介质交界面的局部坐标系下，分解到两个切向方向 $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ 上。因此，它可为导体-介质交界面提供 2 个标量方程。

### 2.4.3 电流无散的积分形式

由前述可知，在导体内与介质内均满足电场无散，即： $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 。但将该微分方程转化为积分方程并非显而易见。文献 [22]采用一种类似有限差分思想，将该微分方程化为积分方程。图 2-4 描述了该转换的基本想法。

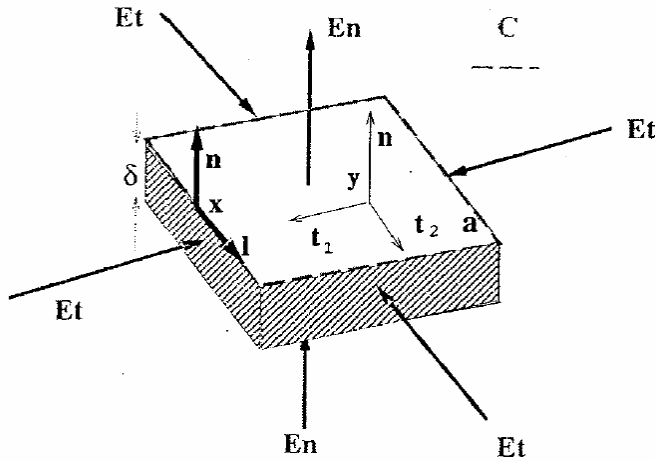


图 2-4 电流无散的积分方程推导示意图[22]

图中是一个离散的面元，该面元带有延至导体内的微小厚度 $\delta$ ，其上表面为导体外表面。电流无散的物理含义为：流入和流出该长方导体区域的电流相等，即：

$$\int_C \vec{E}_t(x) \cdot (\vec{n}(x) \times \vec{l}(x)) dx - \int_a \frac{\partial E_n(y)}{\partial n(y)} dy = 0 \quad (2-23)$$

其中， $C$ 为包围该面元上表面 $a$ 的外围封闭环， $\vec{n}(x)$ 和 $\vec{l}(x)$ 分别是单位外法向量和单位环向量， $\vec{E}_t(x)$ 表示电场的两个切向分量构成的向量， $x$ 为外围环上的积

分点； $y$  为面  $a$  上的积分点。

式 (2-23) 中第一项的物理含义为由导体四周流入该长方体的电流，而第二项的物理含义为由上下表面流出该长方体的电流。显然它们应相等才能保证电场无散的要求。需注意的是，第二项实际来自导数的差分形式，即：

$$\int_a \frac{\partial E_n(y)}{\partial n(y)} dy = \int_a \frac{E_{no} - E_{n\delta}}{\delta} dy$$

其中， $E_{no}$  是外表面法向电场强度， $E_{n\delta}$  是导体表面下  $\delta$  深度处的法向电场强度。

积分方程 (2-23) 建立了任一导体表面上，切向电场和法向电场导数之间的关系。该积分方程被应用到导体-介质交界面上，因此，为交界面补充了 1 个标量方程。

#### 2.4.4 电容边界积分方程

将微分方程 (2-12) 转化为积分方程，并考虑到电荷仅分布在导体表面，可得如下边界积分方程：

$$\varphi(y) = \int_S G_0(y, x) \frac{\rho(x)}{\varepsilon} dx \quad (2-24)$$

其中， $G_0(y, x)$  与式 (2-20) 定义一致。

该边界积分方程建立导体表面电荷  $\rho$  与标量电位  $\varphi$  之间关系，因此，也被称为电容边界积分方程。该方程仅在 EMQS 假设和全波分析中需要。

#### 2.4.5 边界积分方程小结

将上述提及的重要微分方程和边界条件，以及转化得到相应的边界积分方程总结在表 2-2 中，其中，左边为场域微分方程，右边为积分方程或边界条件。

表 2-2 直接边界元电感提取模型中微分和积分方程小结

	场域微分方程	边界积分方程或边界条件
每一导体内	$\nabla^2 \bar{E} - i\omega\mu\sigma \bar{E} = 0$ $\nabla \cdot \bar{E} = 0$	$\rightarrow \int G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \bar{E}(\mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} - \int \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} \bar{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \bar{E}(\mathbf{y})$ $\rightarrow \int_C \bar{E}_t(\mathbf{x}) \cdot (\bar{n}(\mathbf{x}) \times \bar{l}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int_a \frac{\partial E_n(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} d\mathbf{y} = 0$
所有导体间	$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{E} &= i\omega\mu \bar{J} \\ -\nabla \varphi &= \bar{E} + i\omega \bar{A} \\ \bar{A} &= \int \mu G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{J} d\mathbf{x} \end{aligned} \right\}$	$\rightarrow \int_S G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \bar{E}(\mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} - \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} \bar{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \nabla \varphi(\mathbf{y}) = 0$
	$\nabla^2 \varphi - (iK_0)^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$	$\rightarrow \varphi(\mathbf{y}) = \int_S G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon} d\mathbf{x}$
交界面		$E_n(\mathbf{y}) = 0$
接触面		$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\mathbf{y}) &= constant \\ \bar{E}_t(\mathbf{y}) &= 0 \\ \frac{\partial E_n(\mathbf{y})}{\partial n_y} &= 0 \end{aligned} \right.$

表中可见，在接触面上边界条件为 4 个标量条件（切向电场  $\bar{E}_t(\mathbf{y}) = 0$  可看作两个标量条件）。而在导体-介质交界面上，仅提供了一个显式的边界条件  $E_n(\mathbf{y}) = 0$ 。但在离散时，电场无散的积分方程式(2-23)是离散在交界面上，它提供一个标量条件；而所有导体之间满足的并矢积分方程，即式(2-22)也仅在交界面的两个切向上离散，它提供另两个标量条件。这样，接触面和交界面均拥有 4 个标量边界条件。更确切地，接触面上标量电位  $\varphi$  和交界面上电场无散的方程实际建立在面元顶点上，而不是同其余积分方程一样建立在面元配置点（中心点）。

## 2.5 离散为线性方程组

为求解上述积分方程，需采用矩量法将积分方程转化为矩阵形式。首先，将导体表面离散为面元，如图 2-5 所示，其为导体表面的一部分，有 6 个面元和 12 个面元顶点。未知数分布为：标量电位  $\varphi$  位于顶点上，而电场强度  $\bar{E}$ 、电场强度法向导数  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial n}$  和电荷密度  $\rho$  均分布在面元中。通常采用常数元，即认为它们在面元内是均匀的。设面元总数为  $P$ ，其中属于接触面的面元数为  $P^C$ ，属于交界面的为  $P^{NC}$ ；节点总数为  $V$ ，其中属于接触面和交界面的节点数分为  $V^C$  和  $V^{NC}$ ，

则总未知变量数为  $7P+V$ （EMQS 假设或全波分析），或  $6P+V$ （MQS 假设）。

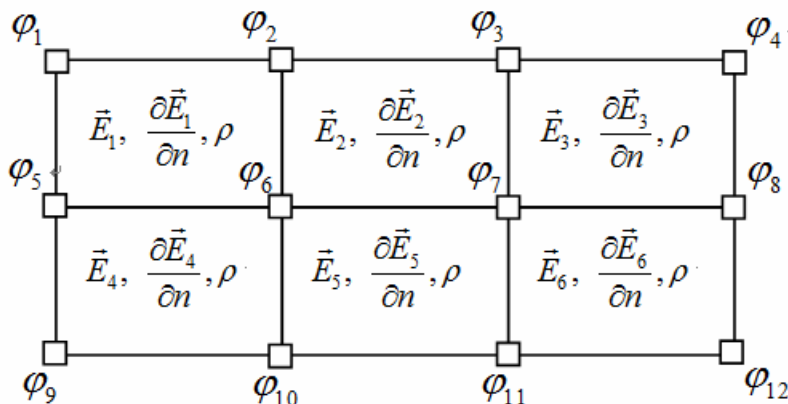


图 2-5 导体表面离散示意图[22]

### 2.5.1 离散边界积分方程

采用点配置法，并将配置点选取为面元中心，可将边界积分方程离散为线性方程组。

对每个导体内所满足的直接边界积分方程式(2-17)可转化为如下矩阵形式：

$$P_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - D_1 \vec{E} = 0 \quad (2-25)$$

其中：

$$P_1(i, j) = \int_{panel_j} G_1(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2-26)$$

$$D_1(i, j) = \int_{panel_j} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}_i, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\mathbf{x} \quad (2-27)$$

这里， $P_1$ 和 $D_1$ 均属 $P \times P$ 的方阵， $i, j$ 分别为面元的索引号， $\mathbf{y}_i$ 为第 $i$ 个面元的配置点坐标，面元 $j$ 为积分面元。当 $i = j$ 时， $P_1$ 和 $D_1$ 为不同奇性的奇异积分，需要特殊处理，特别地， $D_1$ 中的强奇异积分会导致自由项（在光滑表面为 $+1/2$ ），也需一并在积分中处理，而未单独列出<sup>[26]</sup>。

在导体-介质交界面上，将式(2-22)转化为并矢线性方程组，可到：

$$P_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - D_0^{-1/2} \vec{E} + \nabla \varphi = 0 \quad (2-28)$$



其中,  $D_0^{-1/2} = D_0 - I$ ,  $I$  为相应大小的单位矩阵, 且:

$$P_0(i, j) = \int_{panel_j} G_0(y_i, x) dx \quad (2-29)$$

$$D_0(i, j) = \int_{panel_j} \frac{\partial G_0(y_i, x)}{\partial n_x} dx \quad (2-30)$$

这里,  $P_0$  和  $D_0$  均为  $P \times P$  的方阵。

将式(2-28)分解到交界面局部坐标系的两个切向上, 可得:

$$T_{1x}(P_0 \frac{\partial E_x}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_x) + T_{1y}(P_0 \frac{\partial E_y}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_y) + T_{1z}(P_0 \frac{\partial E_z}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_z) + A_{T_1} \varphi = 0 \quad (2-31)$$

$$T_{2x}(P_0 \frac{\partial E_x}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_x) + T_{2y}(P_0 \frac{\partial E_y}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_y) + T_{2z}(P_0 \frac{\partial E_z}{\partial n} - D_0^{-1/2} E_z) + A_{T_2} \varphi = 0 \quad (2-32)$$

其中,  $(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z})$  和  $(T_{2x}, T_{2y}, T_{2z})$  是将全局坐标系  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  转换到局部坐标系  $(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{n})$  下的转换矩阵, 它们均为简单的对角阵。例如:  $(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z})$  实际上是将第  $j$  个面元在局部坐标系下的切向  $\hat{t}_1(j)$  的三个分量, 分别放置到  $T_{1x}(j, j)$ ,  $T_{1y}(j, j)$ ,  $T_{1z}(j, j)$  对角线上形成。此外,  $A_{T_1}$  和  $A_{T_2}$  属于  $P \times V$  的矩阵, 其表达式为:

$$A_{T_1} \varphi = \nabla_{T_1} \varphi = T_{1x} \nabla_x \varphi + T_{1y} \nabla_y \varphi + T_{1z} \nabla_z \varphi$$

$$A_{T_2} \varphi = \nabla_{T_2} \varphi = T_{2x} \nabla_x \varphi + T_{2y} \nabla_y \varphi + T_{2z} \nabla_z \varphi$$

表示标量电位在两个切向方向上的梯度。这里, 再一次利用有限差分思想, 如图 2-6 所示。

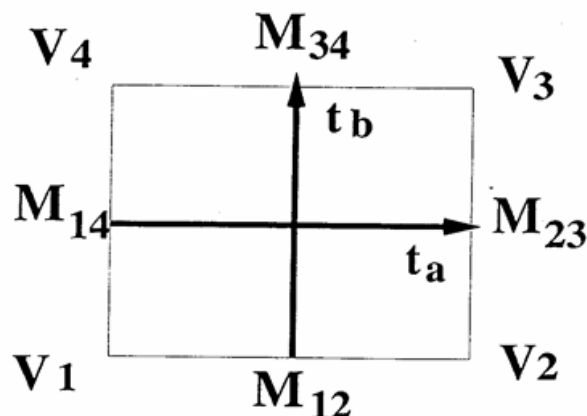


图 2-6 计算标量电位梯度[22]

以在一个切向方向  $t_a$  的计算为例，其公式为：

$$\nabla_{t_a} \varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_4}{2|M_{14}M_{23}|}$$

其中， $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  分别为顶点  $V_1, V_2, V_3, V_4$  的电位， $M_{12}, M_{23}, M_{34}, M_{14}$  分别相应边的中点， $|M_{14}M_{23}|$  是连接两中点  $M_{14}$  和  $M_{23}$  的长度。

对于电容积分方程，即式(2-24)，可得到矩阵形式为：

$$P_0 \rho - \varepsilon A_p \varphi = 0 \quad (2-33)$$

$A_p$  是一个  $P \times V$  矩阵，它通过平均面元顶点电位得到中心配置点电位。平均算法是简单的算术平均，如四边形的面元为：

$$\varphi_Q = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \varphi(v_i)$$

其中， $Q$  是中心配置点， $\varphi(v_i)$  分别是顶点的电位。

对于电场无散积分方程，即式(2-23)，处理上较特殊。它围绕交界面顶点生成一个虚拟面元，并针对该虚拟面元离散积分方程(2-23)，并建立方程，而不是通常点配置法中针对“真实”面元配置点建立方程，如图 2-7 所示，其中， $P_1, P_2, P_3, P_4$  为四个非接触面元，它们共享一个非接触面顶点  $O$ ，四个面元的配置点（中心点） $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  构成一个双重面元  $C$  (dual panel)，积分方程(2-23)就是在该双重面元上进行离散，并建立方程。

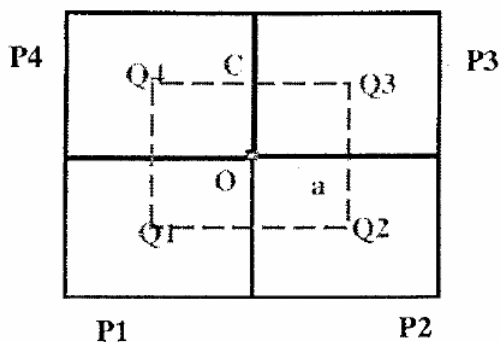


图 2-7 离散电流无散示意图 [22]

离散后得到的矩阵形式为：

$$C_{dx} \frac{\partial E_x}{\partial n} + C_{dy} \frac{\partial E_y}{\partial n} + C_{dz} \frac{\partial E_z}{\partial n} + C_x E_x + C_y E_y + C_z E_z = 0 \quad (2-34)$$

其中， $C_{dx}$ ， $C_{dy}$ ， $C_{dz}$ ， $C_x$ ， $C_y$ ， $C_z$  均为  $V^{NC} \times P$  的矩阵，它们均仅与几何形体有关。具体含义请参见文献 [22]。

### 2.5.2 离散边界条件

在边界上，关于电场的第一类边界条件，即交界面上的  $E_n = \frac{i\omega\rho}{\sigma}$  和接触面上的  $\vec{E}_t = 0$  可对面元中心配置点建立方程，将其转化为矩阵形式。

交界面边界条件  $E_n = \frac{i\omega\rho}{\sigma}$ ，即式(2-13)可化为：

$$n(j) \cdot \vec{E}(j) = \frac{i\omega\rho}{\sigma}$$

从而，可得：

$$N_x E_x + N_y E_y + N_z E_z + W \rho = 0 \quad (2-35)$$

其中， $N_x$ ， $N_y$ ， $N_z$  完成由全局坐标向局部坐标转换的功能，类似前述  $T_{1x}$ ， $T_{1y}$ ， $T_{1z}$  等矩阵，它由局部坐标下单位法向量构成的对角阵。 $W$  对角阵填充的是  $-\frac{i\omega}{\sigma}$ 。上述矩阵仅取交界面面元对应的  $P^{NC}$  行。



向量  $\mathbf{x} = (\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial n}, \varphi, \rho)$  已含有电场强度矢量  $\vec{E}$ ，从而可得每个导体内电流密度矢量  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ，用法向电路密度  $J_n = \hat{n} \cdot \vec{J}$  在接触面上作面积分，即可得到从该接触面端口流入的电流大小，即：

$$I = \sum_{panel_j \in C_+} -\sigma(\hat{n}_+ \cdot \vec{E}_j) s_j \quad (2-41)$$

其中， $C_+$  是某个接触面端口上所有面元的集合， $\hat{n}_+$  是第  $j$  面元上的单位外法向量， $s_j$  是第  $j$  个面元的面积，式中的负号表示预设的电流方向是流出导体。

此种在接触面端口上累加法向电流的方法，在频率较低、电流分布较均匀时比较合适，但当频率很高时，由于趋肤效应影响，外围面元上的电场强度远大于中心面元的，这种电流简单累加得到的结果存在较大误差，文献 [22] 中称该现象为“高频问题”，并提出了克服该问题的一种新电流计算方法。它的基本思路是利用安培环路定律，通过计算围绕接触面端口环向面元的磁场环量积分，来反向导出该环内（即导体）电流大小。此种方法被称作高频电流计算模式，具体细节请参见文献 [22]。

## 第3章 应用 CMRM 快速提取多频率点电感原型

在 VLSI 电路中，阻抗是随频率变化的。因此，精确的电路模拟和验证往往需要随频率变化的复值阻抗曲线（电感与电阻曲线或幅值与相位曲线），而不仅仅是某个或少数几个工作频率点的阻抗值。但是，现有电感提取方法，如：基于 PEEC 模型的 FastHenry 和基于直接边界元方法的 FastImp，在多频点阻抗提取时，只采用逐点反复运行程序的方法，计算效率较低。本章将针对多频率点阻抗提取的特点，采用完全多重互反方法(Complete Multiple Reciprocity Method, CMRM) 以达到快速提取的目的。

### 3.1 多频率点电感提取的提出

在 VLSI 电路中，特别某些含衬底的高频电路，由于邻近效应影响，其中电感随频率变化非常剧烈；而由于高频趋肤效应影响，导体电阻也会大致与  $\sqrt{f}$  成比例增长。下面给出一个算例说明这一现象，其中，图 3-1 为带衬底螺旋电感器离散示意图，图 3-2 为该螺旋电感器当频率在  $10^7\text{Hz}$ (10MHz)到  $10^{11}\text{Hz}$ (100GHz) 范围变化时，电阻和电感的频变曲线，结果由 FastImp 计算得到，其中，横轴  $x$  为频率的对数坐标，左、右  $y$  轴分别为电阻和电感。从图中可见，电阻和电感值随频率变化非常剧烈。这时，对于精确的电路模拟和验证，更需提取在一定频率范围内完整的阻抗曲线，而不是仅在一个或少数几个工作频率点的值。此外，在微波/RF 电路中，电感元器件的一个重要参数——品质因数，也需由频变阻抗曲线求得<sup>[51]</sup>。

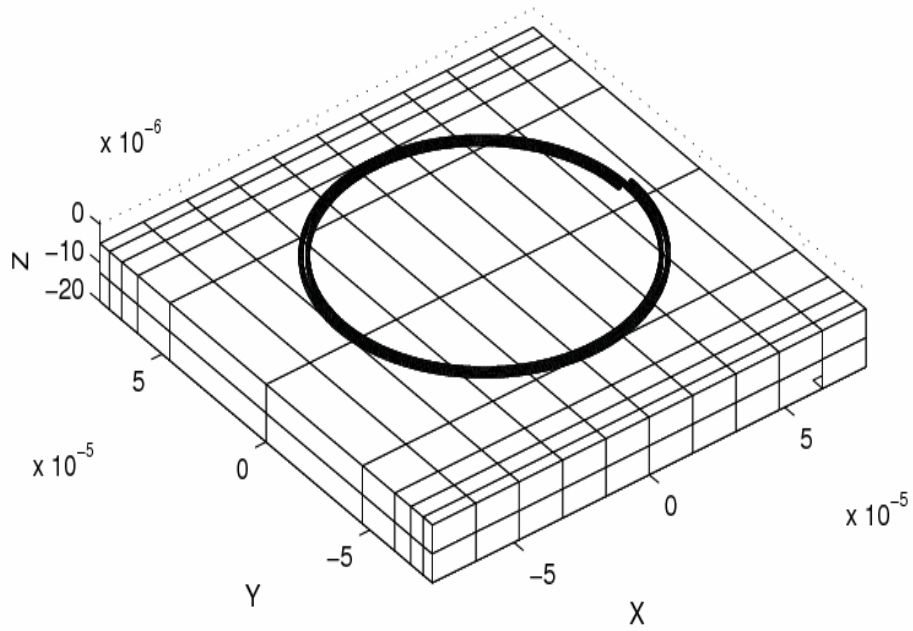


图 3-1 带衬底螺旋电感器离散后示意图

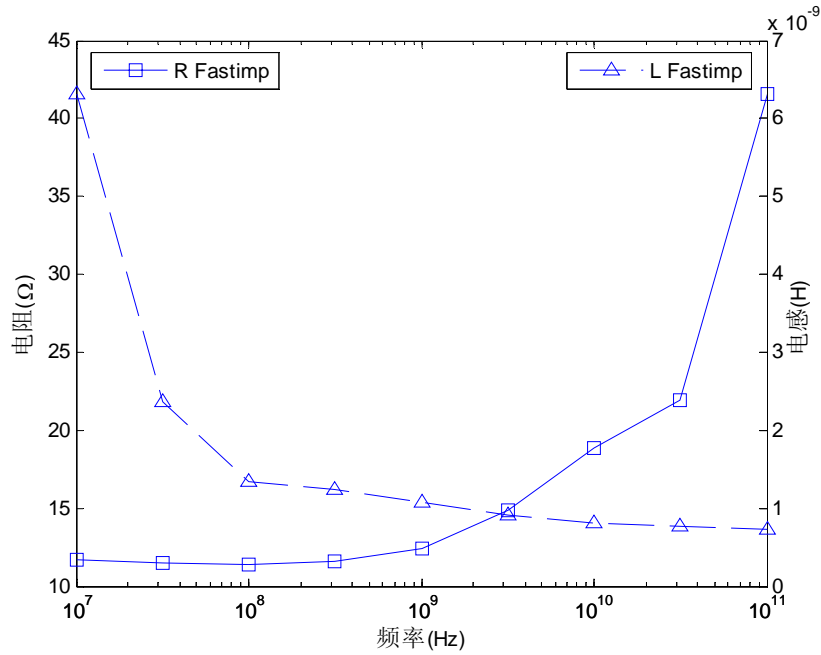


图 3-2 带衬底螺旋电感器频变阻抗曲线

但是，目前主要的阻抗提取方法，如：基于 PEEC 模型的 FastHenry 和基于直接边界元方法的 FastImp，均是简单地采用逐个频率点反复计算的方法获得阻抗曲线。尽管，FastImp 在采用 pFFT 加速时，也考虑了一些不同频率点间的复

用技术，如：与频率无关的投影矩阵和插值矩阵的复用技术等，但由于它们所占时间比重不大，加速不多。

通常，边界元方法均需耗费大量 CPU 时间于计算两两面元之间各种不同类型积分核的数值积分上，对直接边界元电感提取方法 FastImp 也不例外。从考察 FastImp 计算某些实例的 CPU 时间分布时发现，在提取单个频率点阻抗时，尽管它采用 pFFT 方法加速了积分计算，但仍需大量 CPU 时间于各种积分操作，特别是在于与频率相关 Helmholtz 基本解的各种数值积分。例如：在圆环电感算例提取单个频率点阻抗时，FastImp 在各种积分上需花约 61% 的总时间，其中大部分时间用于 Helmholtz 相关积分，而与 Laplace 相关的所需时间比重很小。求解线性方程组  $Ax=b$  约 37%，其它约 2%。由此可见，若能加速积分计算速度，便能显著减少总 CPU 时间。本章将在直接边界元方法基础上，应用 CMRM 技术将频率相关的 Helmholtz 相关积分核转化为频率无关的积分核，以实现积分结果的复用，即加速从第二个频率点开始的积分计算过程，从而达到加速多频率点电感提取速度的目的。

### 3.2 MRM 和 CMRM 概述

本节简要介绍 MRM 和 CMRM 方法及其相关结论。

#### 3.2.1 MRM 和 CMRM

对一个三维有界闭域，若其内部场变量  $u$  满足 Helmholtz 控制方程，即： $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ ，则不难将其转化为直接边界积分方程  $c_s u_s + \int_{\Gamma} (u q_H^* - q u_H^*) d\Gamma = 0$ ，其中，积分核  $u_H^*$  是熟知的 Helmholtz 方程基本解，形如： $e^{-ikr} / 4\pi r$ 。在上述边界积分方程表达式中，积分核包含与频率相关的波数  $k$  (wave number)，使得所有相关积分运算需要对不同频率点反复进行。如前所述，在积分方程离散化为线性方程过程中，为了计算稠密系数矩阵往往需要耗费边界元方法求解时间的大部分。

除利用 Helmholtz 方程基本解外，人们提出了其它几种边界元方法，它们均可避免使用与频率相关的基本解。最简单一种方法是利用 Laplace 方程基本解。它的基本思路是：将 Helmholtz 方程中的第二项  $k^2 u$  移到等式右边，可视为 Poisson 方程，从而可以直接采用 Laplace 方程基本解  $1/4\pi r$  建立积分方程。此方法虽能



将积分转化为与频率无关，但由 Poisson 方程得到的积分方程含体积分项，离散化时需对问题区域作体离散，丧失了边界元方法仅需面离散的优势，也缺乏效率。

双重互反方法 (Dual Reciprocity Method, DRM) 弥补了上述方法需要体离散的不足。它利用区域内点的插值函数来近似域内未知函数<sup>[52][53][54]</sup>。因此，它不需对整个问题域进行完整的体离散，而仅是在域内选择一些未知点，利用它们和已知的插值函数构造域内未知函数。所以，此方法总未知变量是边界上的未知变量 (边界元) 和域内选定的若干未知点。显然，使用该方法需要合理地给出域内一些未知点 (数量和几何位置) 和一组合适的插值函数，这都会给使用者带来困难。

多重互反方法 (Multiple Reciprocity Method, MRM) 最初由 Nowak 和 Brebbia 提出<sup>[55][56]</sup>。它利用 Laplace 方程高阶基本解的级数形式来代替 Helmholtz 方程基本解。由于 Laplace 方程高阶基本解仅含距离  $r$ ，所以，所有各阶的积分均为频率无关，容易在不同频率间的计算中加以复用。例如：在封闭域特征值问题中，需对不同的波数  $k$  反复计算，文 [57] 即利用 MRM 方法求解并获得成功。显然，多频率点阻抗提取问题也具有类似特点，这正是本章所要解决的问题。

但是，直接应用 MRM 方法于特征值计算会产生“伪特征值”问题。Chen 和 Wong 在 1-D 和 2-D 问题中发现了此现象<sup>[58][59]</sup>，并用组合奇异 (singular) 和超奇异 (hypersingular) 方程的方法，解决了该问题<sup>[58]</sup>。文献 [60] 和 [57] 指出，MRM 公式中的积分核实际上是 Helmholtz 复值积分核的实部。Yeih 等<sup>[61]</sup>进一步证明了 MRM 和复值 Helmholtz 积分核之间更为准确的关系，并提出了完全多重互反方法 (Complete Multiple Reciprocity Method, CMRM)，该 CMRM 公式实际上完全等价于 Helmholtz 复值公式，却保持着 MRM 公式中积分与频率无关的优点，并且，CMRM 公式解决了伪特征值问题，并于最近被应用于半无限大域的 Helmholtz 方程计算问题<sup>[62]</sup>。

本章将要处理的 3-D 电感多频率点提取问题，属于求解含 Helmholtz 方程的边值问题 (Boundary Value Problem, BVP)。在导体内满足矢量 Helmholtz 方程，在外部介质区域则满足波数  $k$  不同的矢量 Helmholtz 方程 (全波分析)，或退化后 ( $k=0$ ) 的矢量 Laplace 方程 (EMQS 或 MQS 假设)。

### 3.2.2 MRM 公式推导

对一三维有界闭域 $\Omega$ ，场变量 $u$ 满足如下标量 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad \text{in } \Omega \quad (3-1)$$

其中， $k$  为波数（wave number），该域边界记为 $\Gamma$ 。

利用格林（Green）第二恒等式，可将场域微分方程 (3-1) 转化为直接边界积分方程：

$$c_s u_s + \int_{\Gamma} (u q_H^* - q u_H^*) d\Gamma = 0, \quad (3-2)$$

其中， $u_s$  为场变量 $u$ 在边界表面源点 $s$ 处的值； $c_s$ 为常数，依赖于边界点 $s$ 处的几何形状（立体角），通常为 $1/2$ （光滑表面）； $q = \partial u / \partial n$ 是 $u$ 在边界上的外法向导数，这里 $\hat{n}$ 指边界上单位外法向量； $u_H^*$ 是 Helmholtz 方程基本解，即： $u_H^* = e^{-ikr} / 4\pi r$ ， $r$ 为场点和源点之间距离； $q_H^* = \partial u_H^* / \partial n$ 。

若将 Helmholtz 方程 (3-1) 中第二项移到等式右边，可将 Helmholtz 方程转化为 Poisson 方程，同样利用格林公式，可得到以 Laplace 方程基本解  $u_0^* = 1/4\pi r$  和  $q_0^* = \partial u_0^* / \partial n$  为积分核的积分方程如下：

$$c_s u_s + \int_{\Gamma} (u q_0^* - q u_0^*) d\Gamma = k^2 \int_{\Omega} u u_0^* d\Omega \quad (3-3)$$

显然，若直接离散积分方程式(3-3)，将导致右端体积分的离散问题。为避免体离散，MRM采用Laplace方程高阶基本解：

$$\nabla^2 u_{j+1}^* = u_j^* = \frac{1}{4\pi r} \frac{r^{2j}}{(2j)!}, \quad q_j^* = \frac{\partial u_j^*}{\partial n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3-4)$$

将式(3-3)右端的体积分转化为面积分。事实上，将(3-4)中第一项( $j=0$ )代入式(3-3)右端，并利用Green恒等式可得：

$$\int_{\Omega} u u_0^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u q_1^* - q u_1^*) d\Gamma - k^2 \int_{\Omega} u u_1^* d\Omega \quad (3-5)$$

于是，式(3-3)可改写为：

$$c_s u_s + \int_{\Gamma} (u q_0^* - q u_0^*) d\Gamma - k^2 \int_{\Gamma} (u q_1^* - q u_1^*) d\Gamma = k^2 (-k)^2 \int_{\Omega} u u_1^* d\Omega \quad (3-6)$$

相似的 $N$ 次变换，可得：

$$c_s u_s + \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \left[ \int_{\Gamma} (u q_j^* - q u_j^*) d\Gamma \right] = (-1)^N (k^2)^{N+1} \int_{\Omega} u u_N^* d\Omega \approx 0 \quad (3-7)$$

其中,若 $r$ 和 $k$ 有界,足够大的 $N$ 可保证式(3-7)右端体积分逐渐趋于0,并最终可忽略<sup>[55][56][63]</sup>。这样,MRM方法能将体积分转化为面积分<sup>[55][63]</sup>。式(3-7)是MRM的基本公式。

在MRM公式(3-7)中, $u_j^*$ 和 $q_j^*$ 均为实数,当应用于特征值分析时可能产生伪特征值,并且不能直接应用于无限域Helmholtz方程问题。但文献[64]将其扩展到能适用于无限域的Helmholtz问题。为解决伪特征值问题,文献[61]提出了一组称为CMRM的公式,它是在式(3-4)的零阶基本解基础上,添加一个复值常数,将式(3-4)转化为如下式(3-8)<sup>①</sup>:

$$\bar{u}_j^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \frac{r^{2j}}{(2j)!} - ik \frac{r^{2j}}{(2j+1)!} \right], \quad \bar{q}_j^* = \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3-8)$$

利用相似推导,可以得到CMRM积分方程为:

$$c_s u_s + \int_{\Gamma} (u \bar{q}^* - q \bar{u}^*) d\Gamma = 0 \quad (3-9)$$

其中:

$$\bar{u}^* = \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \bar{u}_j^*, \quad \bar{q}^* = \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \bar{q}_j^* \quad (3-10)$$

实际上,CMRM公式的一个重要结论是:式(3-10)中级数收敛于Helmholtz方程的复值公式。因此,若在保证收敛性的前提下,可将CMRM积分公式(3-9)简单地看作Helmholtz复值公式(3-2)的Talyor展开。

### 3.3 利用 CMRM 公式复用数值积分

利用直接边界元法提取阻抗时,离散导体表面后,为得到线性方程组的系数矩阵 $\mathbf{A}$ ,大部分CPU时间用于计算分块稠密系数矩阵 $\mathbf{A}$ 中元素的如下数值积分:

① 参考文献[61]中公式有误,其中遗漏了虚部的 $k$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1(a,b) = \int_{panel_b} \frac{e^{ikr(x_a,y)}}{4\pi r(x_a,y)} dy \\ \mathbf{D}_1(a,b) = \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_y} \left[ \frac{e^{ikr(x_a,y)}}{4\pi r(x_a,y)} \right] dy \\ \mathbf{P}_0(a,b) = \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a,y)} dy \\ \mathbf{D}_0(a,b) = \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_y} \left[ \frac{1}{4\pi r(x_a,y)} \right] dy \end{array} \right. \quad (3-11)$$

其中： $a, b$  是面元 (panel) 的全局索引， $panel_b$  表示第  $b$  个面元， $k = \sqrt{-i2\pi f \mu \sigma}$  (MQS 假设)， $x_a$  是第  $a$  个面元的配置点 (collocation point)，通常为面元  $a$  的中心点，算子  $r(\cdot)$  计算两点之间的距离。

在式(3-11)中，矩阵  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{D}_1$  是Helmholtz方程基本解相关积分，与频率相关，而矩阵  $\mathbf{P}_0$  和  $\mathbf{D}_0$  是Laplace方程基本解相关积分，与频率无关。因此，对多频率点电感提取，与每个频率点对应的  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{D}_1$  均需反复计算，占总积分时间的大部分。此外，计算矩阵  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{D}_1$  往往要比计算  $\mathbf{P}_0$  和  $\mathbf{D}_0$  矩阵耗时，原因是计算积分核  $e^{-ikr}/4\pi r$  比计算积分核  $1/4\pi r$  需更多CPU时间。

应用CMRM级数公式，即式(3-10)，可将  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{D}_1$  替换为：

$$\mathbf{P}_1^*(a,b) = \int_{panel_b} \bar{u}^* dy, \quad \mathbf{D}_1^*(a,b) = \int_{panel_b} \bar{q}^* dy. \quad (3-12)$$

从而可将频率因子  $(-k^2)^j$  与积分  $\int_{panel_b} \bar{u}_j^* dy, \int_{panel_b} \bar{q}_j^* dy$  分开。对于这些与频率无关的积分序列，可事先一次性计算并保存，之后，对于每个不同频率点  $k$ ，只需简单计算级数的部分和 (partial summation)，而省却了费时的频率相关数值积分计算。这就是利用 CMRM 进行多频率点阻抗快速提取的基本思想，与应用 MRM 方法计算特征值问题的思想十分类似。

### 3.4 数值困难及其解决方法

#### 3.4.1 数值困难

但是，在三维VLSI电感提取中，直接应用上述CMRM级数公式会产生严重数值困难，原因类似于数值计算部分和  $e^{-x} \approx \sum_{j=0}^N \frac{(-x)^j}{j!}$  所产生的数值困难。这是

一种被称为“病态级数”的问题<sup>[43][65][66]</sup>，当 $|x| \gg 1$ 时，上述部份和计算会出现大数相消（cancellation）而导致巨大误差的现象。对于数值很大的 $x$ ，实际上，是很难通过该级数的部分和公式计算 $e^{-x}$ 的。图 3-3 和图 3-4 给出一个具体的算例，形象说明这一点。图 3-3 描绘 $e^{-20}$ 的部分和曲线，横轴为级数长度，纵轴为级数部分和。从图中可见，即使级数长度 $N = 79$ ，部分和仅为 $4.17 \times 10^{-9}$ ，而精确结果为 $2.0 \times 10^{-9}$ ，仍有巨大相对误差。况且在实际计算中，往往不能取如此多的项，若该级数截断在 $N = 20$ 左右，其结果将完全错误。另一方面，图 3-4 为 $e^{-1.0}$ 的部分和曲线，图中显示，当 $x$ 数值较小时，该级数收敛很快，仅 7-8 项即可得到 3 位以上有效数字的精度。

在多频点阻抗提取中，运用 CMRM 公式所遇到的数值困难与上述指数病态级数非常相似。原因是，在 VLSI 电感提取中，频率变化范围很大，通常从 $10^4\text{Hz}$ 到 $10^{11}\text{Hz}$ （100GHz），相应的 $k (= \sqrt{-i2\pi f \mu \sigma})$ ，在 MQS 假设下）从 $10^3$ 到 $10^6$ ，而 $r$ 不仅绝对数值非常小，一般为 $\mu\text{m}$ 单位（ $10^{-6}$ 米），直接用其计算容易导致下溢，更为严重的是，它变化范围也非常大。对于互连线，长度方向尺寸可比截面方向尺寸大若干个数量级。 $k$ 与 $r$ 的较大变化使得直接利用 CMRM 级数公式于电感提取是不可能的。而这类数值困难在特征值问题分析的文献中并未提及，在那里所作的数值试验均能保证 $k$ 和 $r$ 在 1.0 附近。为此，本章提出一组方法来克服上述数值困难，具体包括：距离归一化、窗口计算，远场快速近似计算公式，迭代形式近场快速计算公式。

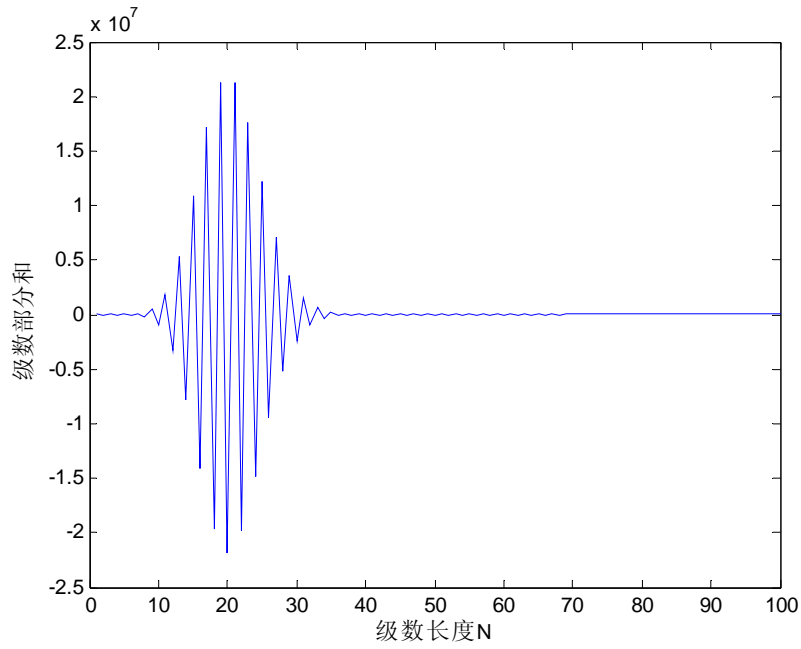


图 3-3  $e^{-20}$  收敛曲线

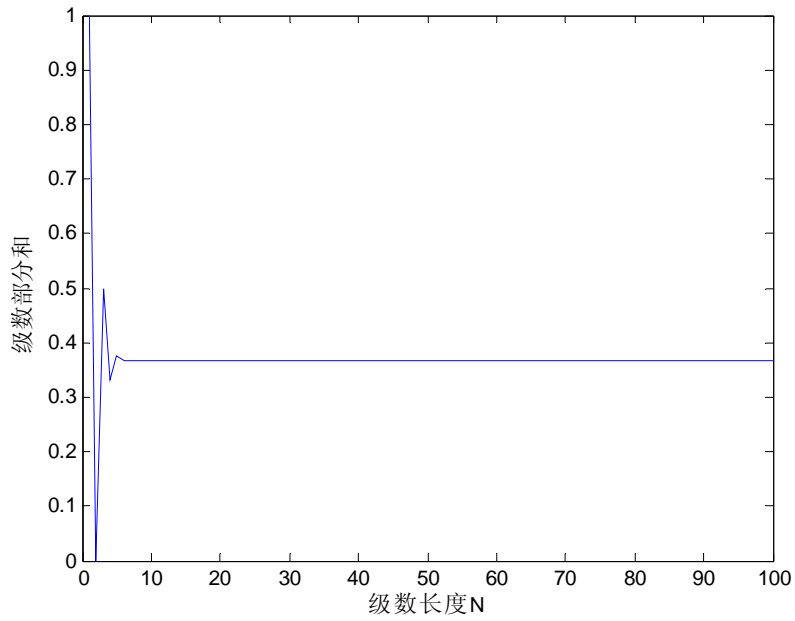


图 3-4  $e^{-1}$  收敛曲线

### 3.4.2 距离归一化 (normalization)

若暂不考虑频率变化范围大所带来的困难，而仅考虑  $r$  绝对值很小和  $r$  变化

范围大的数值困难。事实上， $r$  所引起的困难表现在数值积分计算中，下面通过  $P_I^*(a,b)$  采用 CMRM 公式第一部分的计算来说明。

$$P_I^*(a,b) = \int_{panel_b} \bar{u}^* dy$$

$$\xrightarrow{\text{first part}} \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r} \frac{r^{2j}}{(2j)!} dy \quad (3-13)$$

式(3-13)中，积分部分  $\int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r} \frac{r^{2j}}{(2j)!} dy$  是单独计算并保存，对于非常小绝对值的  $r$  和非常大范围数值变化的  $r$ ，指数级数  $r^{2j}$  在累加时依然会产生相消等类似的数值困难，为此，引入平均距离  $r_{avg}$  使之归一化 (normalization)，即：

$$P_I^*(a,b) = \int_{panel_b} \bar{u}^* dy \rightarrow \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r} \frac{r^{2j}}{(2j)!} dy$$

$$= \sum_{j=0}^N (-k^2 r_{avg}^2)^j \int_{panel_b} \frac{(r(x_a, y) / r_{avg})^{2j}}{4\pi r(x_a, y)(2j)!} dy \quad (3-14)$$

这种等价变换可有效消除距离  $r$  带来的数值困难<sup>[67][68]</sup>。

平均距离  $r_{avg}$  的选取原则为：能体现评价点和积分面元之间的平均距离。在本文，是取积分面元上中心点和各顶点与评价点距离的平均作为平均距离  $r_{avg}$ ：

$$r_{avg}(a,b) = \frac{1}{N_b + 1} \sum_{t=0}^{N_b} r(x_a, y_{b,t}) \quad (3-15)$$

其中， $x_a$  是第  $a$  个面元上的配置点 (评价点)，一般为  $panel_a$  的中心点； $y_{b,t}$  是第  $b$  个面元上的第  $t$  个顶点，当  $t=0$  时为中心点； $N_b$  是第  $b$  个面元顶点数，如图 3-5 所示。

需要注意的是， $r_{avg}(a,b)$  是一个矩阵，用于描述任意两面元之间的平均距离。由于它与频率无关，可事先计算出来并保存以供复用。

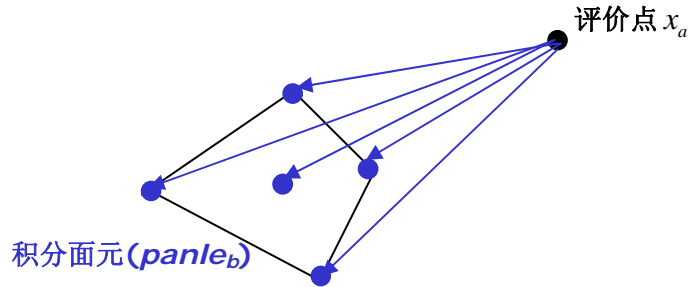


图 3-5 平均距离计算的示意图

### 3.4.3 窗口技术

应用距离归一化后，计算  $P_l^*(a,b)$  的数值困难转化为如何准确计算频率相关项  $(-k^2 r_{avg}^2)^j$ 。通常，绝对值  $\|kr_{avg}\|$  变化范围为  $10^{-3}$  到  $10^2$ ，当  $\|kr_{avg}\|$  比较大时，如：大于 10.0，便不宜采用式(3-14)直接计算。

为解决这新数值困难，引入了窗口技术，可将场计算分为近场计算和远场计算两部分。近场计算时， $\|kr_{avg}\|$  比较小，能安全而快捷地采用式 (3-14) 进行准确计算；而远场计算时，可通过其它快速近似公式进行计算。这里，区分远场和近场的判据为：

$$\|kr_{avg}(a,b)\| < W \quad (3-16)$$

其中， $W$  为窗口大小的阈值。

值得注意的是， $kr_{avg}$  是无量纲的。所以，窗口阈值  $W$  也为无量纲常数，并有明确的物理含义。例如，在 MQS 假设下，有  $k = (1-i)k_{real}$ ，其中：

$$k_{real} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta},$$

式中， $\delta$  为趋肤深度，其量纲为长度单位：米，由此：

$$kr_{avg} = \sqrt{2} \frac{r_{avg}}{\delta}. \quad (3-17)$$

从式 (3-17) 可知， $kr_{avg}$  表达了是场（评价点）和源（积分面元）间的平均距离与趋肤深度之间的关系。由于电磁波在导体内呈指数衰减，当场源之间距离为 5 个趋肤深度时，振幅衰减至 1% 以下。因此，对于大的  $kr_{avg}$ ，源的影响是很小的，并无精确计算的必要。



在程序原型中，我们选取窗口大小为  $W = 2\pi$ （一个波长），计算结果表明，在此窗口大小下，级数长度  $N$  取 12 一般就可保证 3-4 位有效数字的计算精度，可满足工程应用要求。

### 3.4.4 远场快速近似计算

如前所述，当  $kr_{avg}$  较大时，难以采用级数公式计算。但考虑到，CMRM 公式收敛于 Helmholtz 复值公式这一事实，并且，由于指数衰减，源对远场的影响远小于近场，精确计算远场实无太大必要。因此，本文采用如下近似计算公式：

$$\mathbf{P}_1(a, b) = \int_{panel_b} \frac{e^{ikr(x_a, y)}}{4\pi r(x_a, y)} dy \approx e^{ikr_{avg}(x_a, y)} \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a, y)} dy \quad (3-18)$$

其中，积分项  $\int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a, y)} dy$  恰好就是 CMRM 积分序列中的第一项，因此，采用式(3-18)计算  $\mathbf{P}_1(a, b)$  时，实际上并不需数值积分操作，保证了计算速度。类似地，可以得到  $\mathbf{D}_1(a, b)$  的近似计算公式为：

$$\mathbf{D}_1(a, b) = \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_y} \left[ \frac{e^{ikr(x_a, y)}}{4\pi r(x_a, y)} \right] dy \approx e^{ikr_{avg}(x_a, y)} \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_y} \left[ \frac{1}{4\pi r(x_a, y)} \right] dy. \quad (3-19)$$

数值试验也证实，上述近似计算公式对结果精度影响不大（见本章第 5 小节）。

### 3.4.5 近场积分的快速计算

直接地逐项计算 CMRM 公式中的积分序列将花费大量 CPU 时间。幸运的是，可以简单地将该公式改造为迭代形式，以大幅提高积分序列的生成速度。仅以  $\bar{u}_j$  的实部说明：

$$\bar{u}_{j+1, real}^* = \frac{1}{4\pi r} \frac{r_{rel}^{2j}}{(2j)!} = \frac{r_{rel}^{2j}}{(2j+1)(2j+2)} \bar{u}_{j, real}^*, \quad (3-20)$$

其中， $\bar{u}_{0, real}^* = 1/4\pi r$ 。

进一步，式(3-20)中的系数  $\frac{1}{(2j+1)(2j+2)}$  可以事先计算并保存在表中。这样级数和式每增加一项，仅需额外两次乘法操作即可完成。因此，通过 CMRM 积分序列迭代计算，可保证其计算速度基本上仅与采用的数值积分方法（如积分公式或高斯点数目）有关，而与级数长度无关。

需要注意的是，当配置点位于积分面元内时， $\bar{u}_{0,real}^*$  是弱奇异积分 (weak singular integral)， $\bar{q}_0^*$  是强奇异积分 (strong singular integral) 或称为柯西主值积分 (Cauchy Principal Value integral, CPV)，它们均需特殊处理 [69][70][71]。

### 3.5 数值结果

我们用 C/C++ 语言实现了本章讨论的 CMRM 算法原型。同时，为了公平地比较速度，又实现了 FastImp 中所采用的直接边界元方法原型 (不含 pFFT 加速算法)。前者被称为 CMRM，后者被称为 ODBEM (original direct BEM)。二者之间的唯一差别是，CMRM 采用本章的 CMRM 公式和远场近似公式复用积分，而 ODBEM 是简单地采用直接计算所有积分的方法，即 FastImp 中不含 pFFT 加速时所采用的方法。这二者的比较可大致显示出 CMRM 方法在多频率点电感提取中实际的加速效果。线性方程组求解是调用 Matlab 中的求解引擎 (“\” 算子)。数值积分是采用二维高斯积分公式，其中，高斯点数目取为  $20 \times 20$ ，以保证近奇异积分计算精度。同时，取 FastHenry 结果为精度比较的标准。导体表面被离散为矩形元，采用常数边界元，配置点位于面元中心。

在 CMRM 方法中，窗口大小阈值为  $W = 2\pi$ ，级数长度  $N = 12$ 。所有程序均在 Intel Pentium IV 1.8GHz CPU 的计算机上运行。

#### 3.5.1 单导体算例

导体尺寸为  $1\mu\text{m} \times 1\mu\text{m} \times 8\mu\text{m}$ ，其表面被离散为  $4 \times 4 \times 8$  共 160 个面元，如图 3-6 所示。

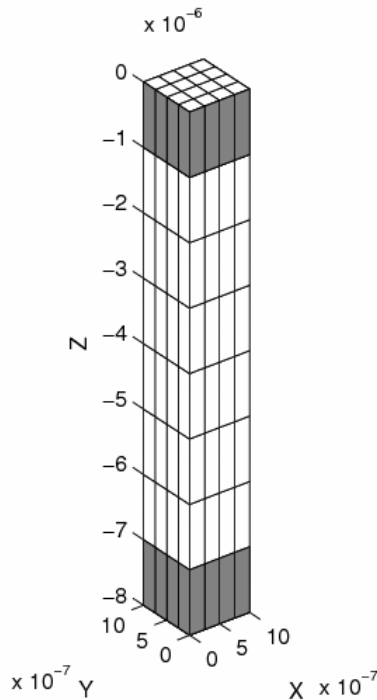


图 3-6 离散后单直导体

其中，围绕两个端面的灰色面元用于高频模式计算端面法向电流<sup>[22]</sup>。

阻抗提取的频率范围为从  $10^4\text{Hz}$  到  $10^{11}\text{Hz}$ ，共均匀提取其中 8 个频率点。频变电阻和频变电感分别如图 3-7 和图 3-8 所示。其中，FH512 表示 FastHenry 在离散为 512 个电流细丝下的结果，依此类推。

从图 3-8 看到，由 CMRM 和 ODBEM 得到的电感结果在整个频率范围内符合得非常好，当与 FastHenry 的结果相比时，最大相对误差也小于 3.6%。而对电阻，从图 3-7 可看到，CMRM 的结果和 FastHenry 也很接近，但最高频率下 ( $f=100\text{GHz}$ ) 的最大相对误差达 15%。这是因为，当频率达  $100\text{GHz}$  时，CMRM 窗口尺寸大小为  $r_w = 0.93\mu\text{m}$ ，此时，由于频率过高而导致窗口过小，会使稠密系数矩阵中的大部分元素都是利用远场近似公式计算得到，从而导致电阻计算的较大误差。当然，在目前和可见的将来，VLSI 电路工作频率还不大可能达到  $100\text{GHz}$ ，所以，该误差对当前电路的影响并不太大。而当频率  $f=15\text{GHz}$  时，CMRM 的结果与 FastHenry 符合得较好。因此，就目前和不远未来 VLSI 电路模拟和验证的需求而言 CMRM 方法是可行的。

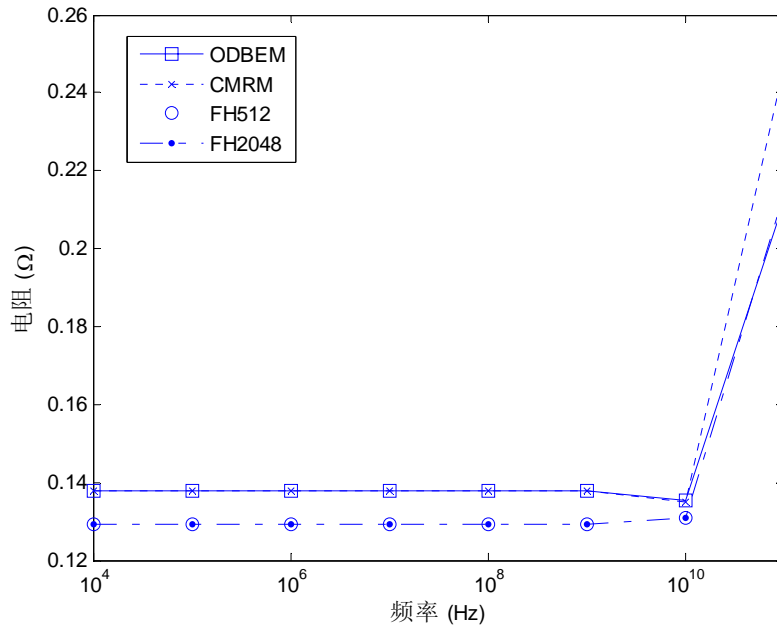


图 3-7 单直导体频变电感曲线

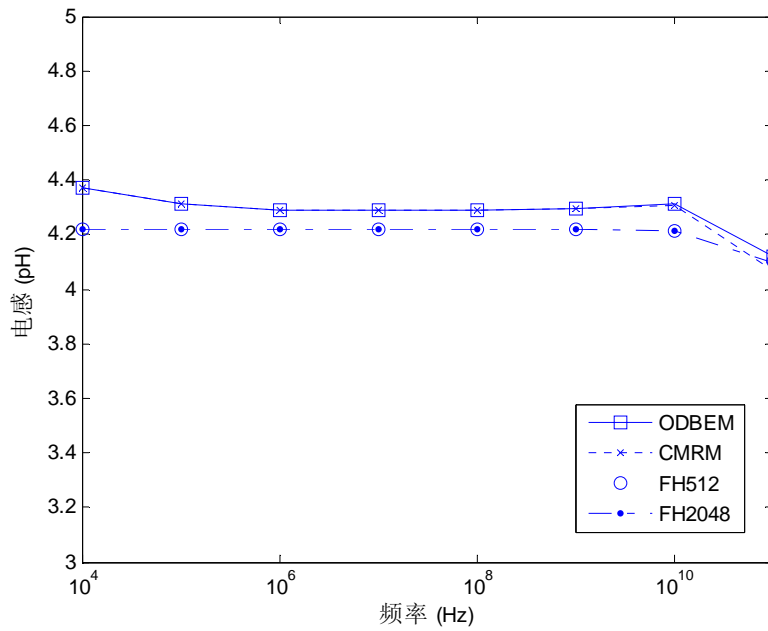


图 3-8 单直导体频变电感曲线

为进行速度比较，CMRM 和 ODBEM 方法随频率点数目增加时，所耗费总 CPU 时间的累加结果示于图 3-9。由图可见，随着频率点数增加，CMRM 方法 CPU 时间增长明显比 ODBEM 方法缓慢许多。此外，由于在近场采用了迭代形

式的 CMRM 积分公式和利用远场快速近似公式,即使在第一个频率点的计算中,CMRM 方法也稍快于 ODBEM 方法。本算例中,从  $10^4\text{Hz}$  到  $10^{11}\text{Hz}$  的频段内包含 8 个采样频率点,CMRM 方法比 ODBEM 快约 3 倍。显然,随着采样频率点数增加,加速效果会更加明显。

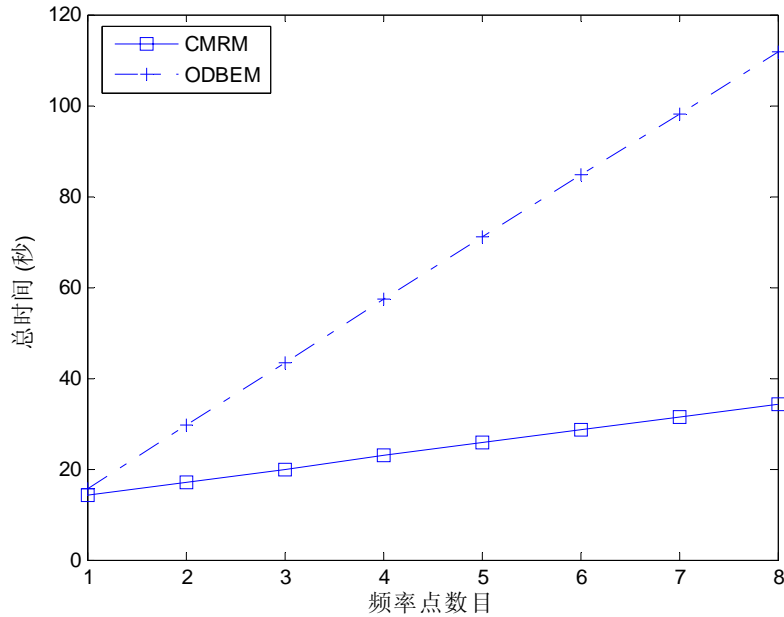


图 3-9 CPU 时间比较

为更清晰地分析 CMRM 和 ODBEM 在速度上产生差别的原因,需更细致地列出两种方法在电感提取过程中,各个具体步骤上的时间细节。为此,先简要介绍提取过程的主要步骤:

- 1) 计算 Laplace 基本解相关积分,即:  $G_0(x, y) = 1/r$  相关积分,该积分与频率无关,可在不同频率点间复用;
- 2) 计算 Helmholtz 基本解相关积分,即:  $G_1(x, y) = e^{ikr}/r$  相关积分,该积分与频率相关,不能直接复用;
- 3) 形成线性方程组  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ;
- 4) 求解线性方程组,并由结果  $\mathbf{x}$  后处理得到阻抗矩阵。

CMRM 和 ODBEM 的差别主要在第 2) 步。ODBEM 简单采用数值积分直接计算与频率相关积分,对于不同频率点,需反复计算;而 CMRM 方法将其分为远场和近场,其中远场采用快速近似公式计算,而近场计算又可分为如下三步:

- a) 计算平均距离矩阵  $r_{avg}$ , 仅需计算一次,可保存供复用;

- b) 计算并保存与频率无关的积分序列，仅需计算一次；
- c) 累加与频率无关的积分系列和与频率相关系数，得到  $P_1(a,b)$  和  $D_1(a,b)$ ，这一步骤对每个频率点需重复计算，但速度很快。

在 CMRM 方法中，对每一个频率点，除了远场积分需要反复计算外，还有上述第 c) 步需要反复计算，而计算量大的数值积分部分，即：第 b) 步仅需计算一次，这是 CMRM 方法能提高速度的关键。

表 3-1 列出在一个频率点上，各步骤所需CPU时间，其中，标有星号的数值表示该步骤对不同频率点需反复计算。从表中看到，Helmholtz核相关积分所需计算时间是Laplace核相关积分的大约 7 倍(11.141s/1.766s)，这表明积分核  $e^{ikr}/r$  的计算远比积分核  $1/r$  的要费时。特别地，从第二个频率点开始，由于CMRM方法复用了积分结果，它计算Helmholtz核相关积分仅需 0.156s（求和时间），而此时ODBEM仍需约 11.141s。这个细节表明，在多频率点电感提取问题上，CMRM 方法的速度优于ODBEM的原因。

表 3-1 单导体算例各主要计算步骤所需 CPU 时间（秒）

	Laplace 积分	Helmholtz 积分			生成 $Ax=b$	求解 $Ax=b$ 及后处理
ODBEM		11.141*				
	1.766	$r_{avg}$	级数	求和	0.125*	2.766*
CMRM		0.000	9.234	0.156*		

### 3.5.2 Bus2x2 算例

第二个算例是 bus2x2 交叉导体结构，其离散后的结构如图 3-10 所示，其中面元数和未知变量数分别为 256 和 1800。因为该结构有 4 根导体，所得到的电阻和电感均为  $4 \times 4$  方阵。

图 3-11 给出了平行导体间互阻抗的实部，即：电阻矩阵中元素 (1, 2) 的结果<sup>①</sup>，用以观察频变电阻。从图可见，CMRM和ODBEM的结果在整个频率范围内符合得很好。但在高频段，即从 10GHz到 100GHz范围内，它们的结果与FastHenry相差很大。为此，我们特别引入FastImp的结果，发现CMRM与ODBEM均同FastImp的结果吻合得较好，而它们都与FastHenry有较大误差。因此，比较

① 注：由于该 bus2x2 为对称结构，元素 (1, 2) 为上层（或下层）两平行导体间互阻抗。

合理的推断是：FastHenry对此结构存在较大误差。

图 3-12 给出了平行导体间互阻抗的虚部，用以观察其频变电感。同样可以看到，CMRM、ODBEM 和 FastImp 的结果在整个频率范围内均符合很好。而同样在高频段，它们的结果与 FastHenry 有些差别。CMRM 和 ODBEM 在速度上的比较结果与第一个算例类似，不再列出。

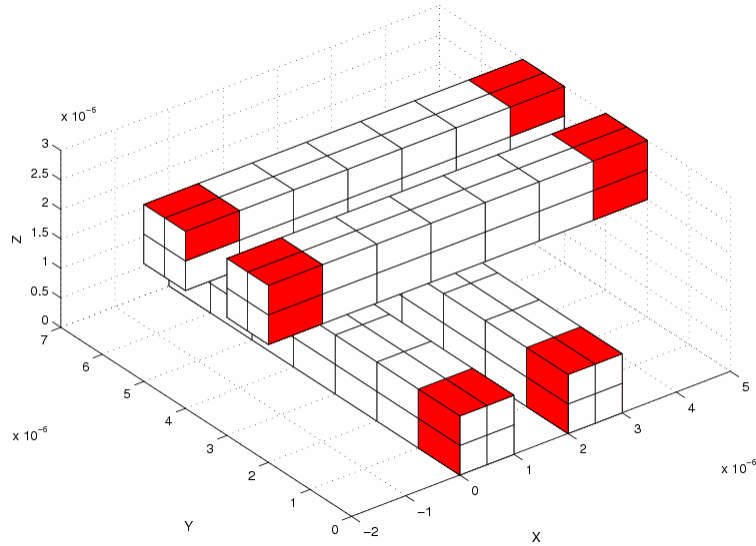


图 3-10 bus2x2 交叉导体

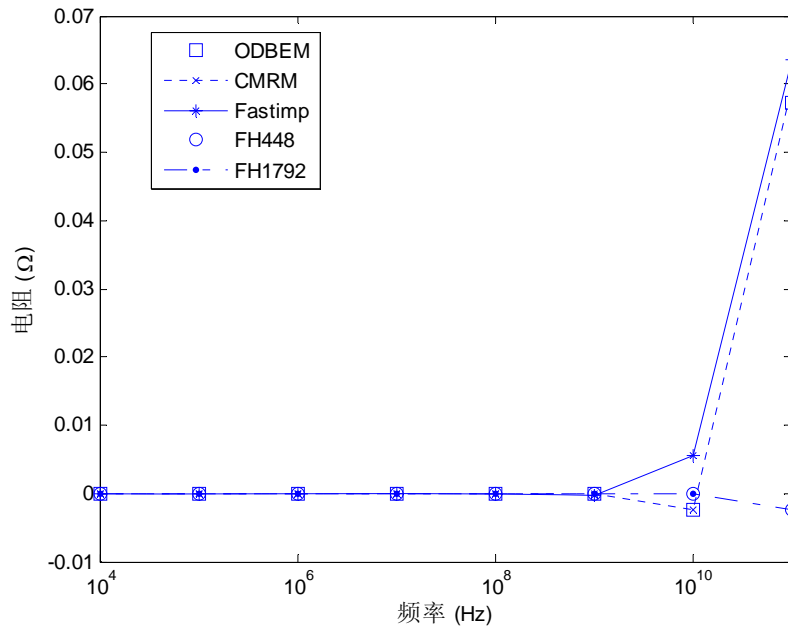


图 3-11 bus2x2 频变电阻曲线

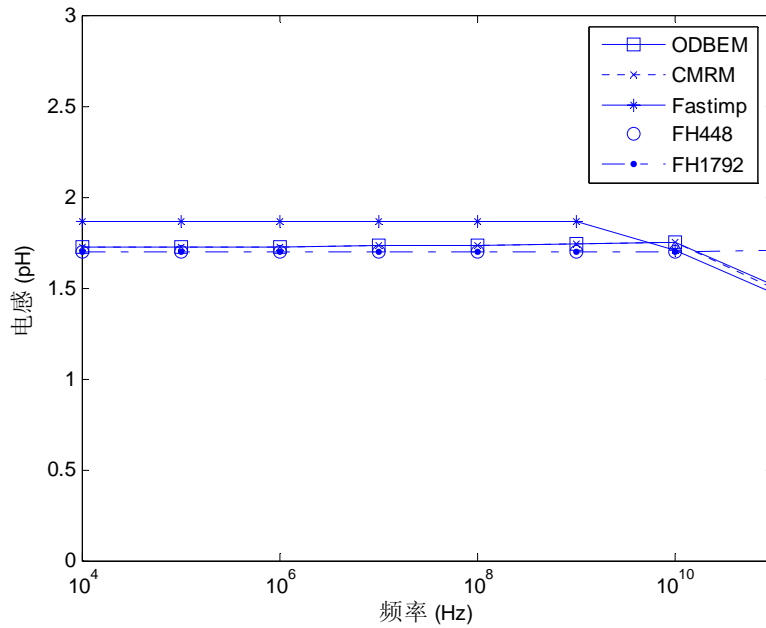


图 3-12 bus2x2 频变电感曲线

### 3.5.3 窗口大小和级数长度对精度的影响

第三个算例是  $1 \times 1$  交叉导体结构，离散后的结构如图 3-13 所示，其中面元数和未知变量数分别为 320 和 2244。在频率为  $f=15\text{GHz}$  时，改变不同的窗口大小阈值  $W$  和级数长度  $N$  来观察（窗口阈值，级数长度）对于结果精度的影响。



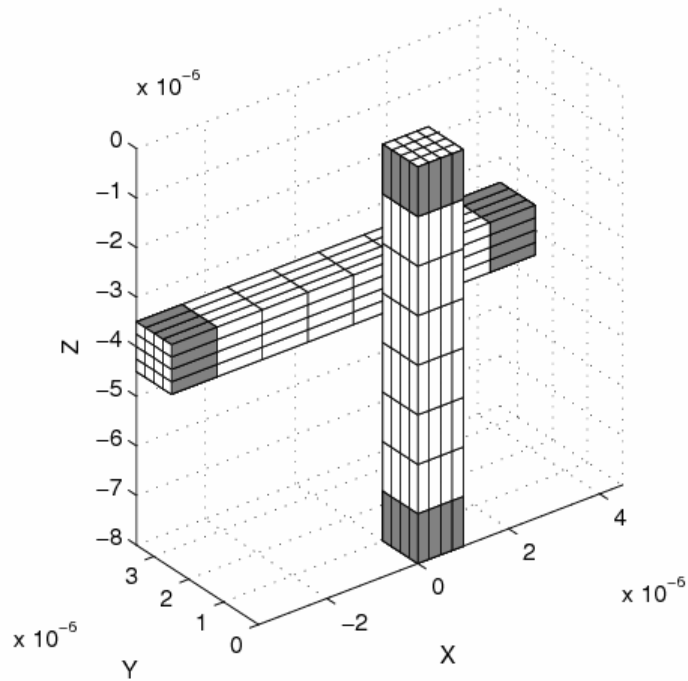


图 3-13 1x1 交叉导体

表 3-2 列出一个导体的自电感和电阻值，其中，引入 ODBEM 结果作为精确解。对于  $W$  和  $N$  的不同组合，表中列出电阻  $R$  和电感  $L$  及其相对误差。

表 3-2 在不同  $(N, W)$  组合下，1x1 交叉导体结构自电感和电阻值

$(N, W)$	$R(\Omega)$	Err (%)	$L(10^{-12}H)$	Err (%)
$(12, 2\pi)$	0.143694	-0.0	4.21306	-0.0
$(9, 2\pi)$	0.147152	2.4	4.18193	-0.8
$(7, \pi)$	0.157814	9.8	4.31280	2.3
$(6, \pi)$	0.157947	9.9	4.31319	2.4
$(5, \pi)$	0.158561	10.3	4.30941	2.3
<b>ODBEM</b>	0.143738	-	4.21392	-

从表中可见，在频率  $f=15GHz$  的较高频率下，即使级数长度只取  $N=5$ ，CMRM 的电感仍能保持小于 3% 的相对误差，此时，由于级数长度的明显减少，CMRM 能减少约一半以上的内存用量。这对于精度要求不高的某些实际应用有一定意义。而另一方面，从表中看到，电阻对窗口阈值  $W$  比电感更敏感一些。但无论怎样，取  $W = 2\pi$  和  $N = 9$ ，电感和电阻值均能保证小于 3% 的相对误差，

这个精度对于工程应用是足够的。

### 3.6 本章小结

在 VLSI 电路模拟与验证以及微波/射频 (RF) 工程应用中, 三维多频率点的阻抗提取越来越成为一个重要课题。但是, 在多频点阻抗提取时, 现有方法都只采用逐点反复运行程序的方法, 计算效率很低。基于适应宽频率范围阻抗提取的直接边界元方法, 本文将完全多重互反方法 (CMRM) 应用到多频率点的阻抗提取问题中。其核心思想是, 将与频率相关的 Helmholtz 核积分转化为与频率无关的 Laplace 高阶基本解的积分, 便从第二个频率点开始可复用数值积分值, 从而大幅减少形成线性方程组时间。但由于波数  $k$  和距离  $r$  的数值变化范围巨大, 在直接应用 CMRM 级数公式时遇到了特征值计算中未见的严重数值困难。为此, 本章提出一组方法加以克服, 其中包括距离归一化处理, 窗口技术以及一组用作远场计算的快速、近似计算公式。

数值结果验证了本章方法的正确性, 同时, 与直接边界元电感提取原型相比, 它在多频率点问题上的速度优势也明显得到体现, 具有潜在的加速效果。

## 第4章 结合 CMRM 和 pFFT 快速提取多频率点阻抗

第3章提出一种利用 CMRM 方法快速提取频变电感的原型，在多频率点电感提取上表现出潜在的速度优势，并能保持较好精度，但由于缺乏处理大量积分计算的快速算法和高效的线性方程组迭代求解技术，使其在速度上难以与目前领先的电感提取原型 FastImp 相比。此外，从数值试验中也已看到，在极高频率下 ( $f=100\text{GHz}$ )，电阻仍存在较大误差 (15%)。因此，要在速度上超过 FastImp，仍需改进目前的原型，并尽可能提高在极端情况下 (极高频率或电大尺寸问题) 的计算精度。

本章讨论将 CMRM 频变电感提取原型与预校正快速傅立叶变换方法 (precorrected FFT, pFFT) 相结合的一种多频点阻抗快速提取方法。pFFT 方法是一种强有力的加速算法，它能极大提高积分矩阵的生成速度，并同时减少内存用量。本章实现两种不同的组合方式，一种是具有较高计算精度的所谓精确组合方式；另一种是速度更快，但误差略大的近似组合方式。并将这两种组合方法集成到原始 FastImp 中，在利用其已有的预条件 GMRES 快速迭代求解技术后，取得了明显效果。

数值结果显示，在多频率点电感提取问题上，两种 CMRM 和 pFFT 的组合方式能获得明显优于 FastImp 的速度结果，而且，即使近似组合方式也能保持相当高的结果精度，克服了原有 CMRM 原型中极高频下误差较大的问题，同时减少了内存用量，使得该方法成为类似 FastImp 的实际可用原型。

### 4.1 CMRM 原型中存在的问题

第3章所提出采用 CMRM 方法快速提取频变电感的原型，虽已用数值实验验证其正确性，并在多频率点问题上，显示出其潜在速度优势。但该原型仍存在几个明显不足。

首先，在速度上，与 FastImp 原型相比，CMRM 原型存在显著差距，这种差距是数量级上的，不具备可比性。其原因主要在如下两点：1) CMRM 原型中采用的是 Matlab 的求解引擎 (“\”算子)，与 FastImp 中所采用高效的大型方程组迭代求解技术：预条件 GMRES 相比，速度上差距很大；2) CMRM 原型中形成线性方程组时，没有采用加速技术，是最为原始的边界元方法，即：需计算任意

两两面元之间的数值积分，而在 FastImp 中采用了 pFFT 快速算法。尽管从第二个频率点开始，CMRM 原型能通过复用积分结果提高速度，但在第一个频率点上，速度相差太多。

第二，在空间上，CMRM 原型中内存开销巨大。从原理上，由于 CMRM 方法需保存与频率无关的数值积分序列，因而适当增加内存开销是可接受的。但是，由于在 CMRM 原型中需生成系数矩阵  $\mathbf{A}$ ，而程序中级数长度为 12，粗略地看，大致相当于复数稠密矩阵  $\mathbf{A}$  需额外保存 12 份。这样巨大的内存开销，会给大规模应用带来困难。造成这一结果的原因在于，实际上，CMRM 级数需要在所有两两面元之间展开。从方法原理上，CMRM 级数仅需在 CMRM 窗口内才需展开，但由于计算低频电感时，窗口尺寸非常大，往往可以覆盖整个问题区域，导致实际需进行级数展开的范围很大；而一旦展开，为了复用考虑，不会再释放该内存。

第三，在通用性上，为了克服数值困难，CMRM 原型中远场需寻找近似、快速的计算公式。该远场计算公式必须能保证快速计算，因为在大规模应用中，近场是局部的、少量的；而远场计算才是全局的，大量的。但寻找这样的快速、近似计算公式并不容易。例如，在 CMRM 原型中，所采用的 Green 函数导数矩阵  $\frac{\partial}{\partial n} \left[ \int_s \frac{e^{ikr}}{r} ds \right]$  的近似计算公式实际上就存在较大误差，当然，远场计算精度一般对最终结果影响不大。但是，这种针对不同积分核需寻找不同远场近似计算公式的策略，使得该方法缺乏通用性。

第四，在结果精度上，特别是在一些极端情况下，如：在极高频率下或电大尺寸问题极粗糙的离散下（面元尺寸远大于  $1/10$  波长），结果误差都会较大。在第 3 章的数值试验中，在频率  $f=100\text{GHz}$  时，电阻存在 15% 的相对误差。导致该问题的原因，依然是远场近似计算。在极高频率下或面元尺寸极大时，CMRM 窗口尺寸相对很小，此时，绝大部分数值积分是由远场近似公式计算得到。而大量窗口外的近似计算，很难预估其对最终结果（阻抗）的影响。这种极端情况下结果的不可靠，是 CMRM 原型中较严重的一个问题。

由以上分析可见，CMRM 方法实际上仅是一种能适用于近场快速计算的方法，而不能适用于远场计算。需要指出的是，在数学上，CMRM 方法对远场依然是收敛的，这种局限不是来自 CMRM 方法模型本身，而是来自实际计算中的数值困难（计算机字长和级数长度有限）。在实际应用中，必须补充另外的远场

方法。而在第 3 章中补充了一组远场近似公式，显然，它不是唯一的方法。本章将替换（补充）另外一种更为强大的远场计算方法：pFFT，它能有效克服上面提到的四点困难。

## 4.2 预校正 FFT 方法（pFFT）简介

本节简要介绍 pFFT 方法的优势、基本原理和尚存在的不足。

### 4.2.1 pFFT 方法的优势

在原始的边界元方法中，利用点配置法将边界积分方程转换到稠密系数矩阵  $\mathbf{A}$ ，需计算任意两两面元之间的数值积分。如前所述，在边界元方法中，这种直接数值积分运算通常需占据整个提取时间的大部分。pFFT 方法不同于这种原始边界元方法在于，它并不需计算所有面元之间的积分，也无需形成稠密的系数矩阵  $\mathbf{A}$ ，因此，它能够在时间和空间上都取得显著的优势，是一种强有力的加速算法<sup>[32]</sup>。

表 4-1 用一组数据直观地说明 pFFT 算法在时间、空间上的优势，该数据取自文献 [32]。表中列出三个实际较大规模算例，并分别用三种不同方法计算得到 CPU 时间和内存用量的结果。在表中，标准方法是指采用 super LU 分解求解线性方程组的直接解法，迭代法为预条件 GMRES 迭代求解技术，而 FastImp 是指采用 pFFT 加速并利用预条件 GMRES 求解。由于三个算例结果类似，下仅以 bus 算例为例作说明。在采用 GMRES 求解后，能将计算时间从标准方法的 136 天降为 160 分钟，由此可见，目前在工程中已广泛使用的 GMRES 在速度上确实有相当大的优势。但 GMRES 并不能减少内存用量，由于依然要形成并存储最终的矩阵  $\mathbf{A}$ ，所以它的内存用量依然为 19GB，而在其它算例中，内存开销甚至更大。而进一步采用 pFFT 加速后，CPU 时间降为仅需 9 分钟，而内存用量也从 19GB 降为 340MB。从该数据可看到，pFFT 算法确能从时间和空间上取得非常显著的效果。

表 4-1 各种方法的 CPU 时间和内存用量比较结果[32]

	Bus 结构	圆形螺旋电感	方形螺旋电感
面元数	18,540	15,194	18,520
未知数	148,380	121,558	148,166
FastImp	9min, 340MB	68min, 642MB	54min, 749MB
*迭代法	160min, 19GB	750min, 72GB	590min, 83GB
*标准方法	136days, 19GB	100days, 19GB	168days, 22GB

其中：\*表示由估计或插值得到

### 4.2.2 pFFT 方法原理

pFFT方法的基本原理<sup>[72][73][29]</sup>可用图 4-1 说明。首先，pFFT方法需将整个待求问题区域划分为均匀网格（stencil），图 4-1 中仅是一个二维结构的二维网格，对实际的三维问题需三维的立体网格。然后，它引入一个称为直接网格（direct stencil）的区域来将总场划分为远场和近场，在图 4-1 中使用了标记为空心圆圈的5×5大网格来示意，在该网格区域内称为近场，而在网格外称为远场，例如：以面元S为源，场点E所处的就是远场。对于近场积分，pFFT采用简单地直接积分方法，而对于远场积分，如：积分面元S对场点E处的积分，就通过预校正快速傅立叶变换的计算框架进行计算。因此，可以看到，pFFT方法实际上仅是一个远场快速计算方法，对于近场而言，它并未采用特别的技巧。

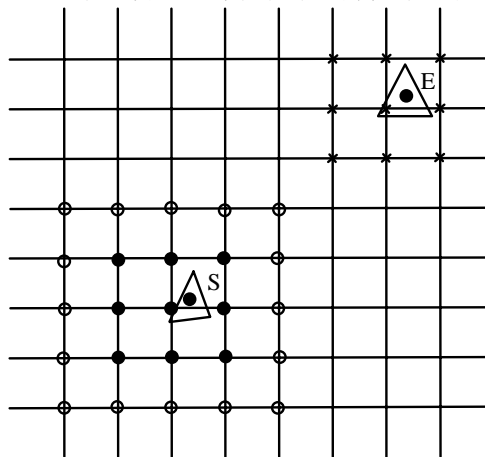


图 4-1 pFFT 方法原理示意图

预校正快速傅立叶计算框架按照顺序可分为如下三个步骤：投影（project）、

卷积 (convolution) 和插值 (interpolation)。它需引入另外两个网格: 投影网格 (project stencil) 和插值网格 (interpolation stencil) 来完成。在图 4-1 中, 分别用标有实心圆圈和斜十字的  $3 \times 3$  小网格表示投影网格和插值网格。

在 pFFT 计算框架中, 第一步骤是投影操作。它将源面元上的电荷 (这里用更具体的电荷代替源) 转换到它所在投影网格的各个网格点上的电荷, 具体如何分配, 由合适选择的已知投影函数决定。第三步骤是插值操作 (第三步骤更易理解, 所以先说明)。如果场点  $E$  周围网格点, 即场点  $E$  所在插值网格上的所有网格点电位均已知, 显然, 容易通过多项式插值得到  $E$  点处的电位。这一步就称为插值步骤, 它是由插值网格点上的电位计算出该插值网格点覆盖区域内任意一点处的电位。在投影步骤和插值步骤之间的第二步是卷积步骤。它的功能是通过快速傅立叶变换 (FFT), 由每个网格点上已知的电荷快速计算出每个网格点上的电位。这里能采用 FFT 快速计算的前提是: 网格必须是均匀划分且格林函数是位置无关的 (position-invariant)。在本论文中出现的格林函数 (积分核) 均满足后一条件。

用矩阵形式, 上述 pFFT 算法可表达为:

$$\mathbf{A}\alpha \xrightarrow{\text{pFFT}} (\mathbf{D} + \mathbf{WHP})\alpha \quad (4-1)$$

这里,  $\mathbf{A}$  是稠密矩阵, 理解为原始边界元方法中需进行两两数值积分的矩阵,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{P}$  分别是直接矩阵、插值矩阵、卷积矩阵和投影矩阵。

从式(4-1)可见, pFFT方法能将一个稠密矩阵向量乘转化为四个稀疏矩阵向量乘, 从而减少计算复杂性。在空间复杂性上, 由于它不需保存稠密矩阵 $\mathbf{A}$ , 而是保存四个稀疏矩阵 ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}$ ), 从而可减少存储空间。理论上, pFFT方法能将整体计算复杂性, 从  $O(N_p^2)$  减至  $O(N_p + N_g \log(N_g))$ , 空间复杂性从  $O(N_p^2)$  减至  $O(N_p + N_g)$ ,  $N_p$  和  $N_g$  分别为面元和网格点的数目<sup>[29]</sup>。

因为矩阵  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{P}$  是与积分核无关, 从而也与频率无关 (它们仅取决于网格点和面元之间的几何关系以及已确定的投影、插值函数), 所以, 在多频率点电感提取中, 它们能在不同频率点之间被共享。但矩阵  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  是积分核相关的, 因此对于形如  $e^{ikr}/r$  的积分, 它们是  $k$  (频率) 相关, 从而对于不同频率点它们均需反复计算。与计算  $\mathbf{D}$  矩阵相比, 计算  $\mathbf{H}$  矩阵的时间通常可忽略。因此, pFFT 方法的一个主要不足是, 计算  $\mathbf{D}$  矩阵需过多的时间且与频率相关。

需指出的是, 若积分核是形如  $1/r$ ,  $\mathbf{D}$  矩阵也为频率无关。此时它可在多频

率点间被共享和复用。但通常，这种积分核仅发生在对介质空间的处理中，即在MQS和EMQS假设下，对式(2-29)和(2-30)的处理上。但是这种复用所占时间比重不大，而且，在全波分析中将变得不再可用。因为全波分析中，介质中积分核也从形如 $1/r$ 的积分转化为更复杂的形如 $e^{ikr}/r$ 的积分。

### 4.2.3 pFFT 方法不足

在介绍 pFFT 算法基本原理后，将发现 pFFT 方法本身存在如下不足之处。

首先，如前所述，pFFT 方法本质上仅是一种远场快速计算方法，对于近场积分而言，它简单地采用直接数值积分方法处理。

第二，近场直接积分的时间开销，即计算  $D$  矩阵的 CPU 时间，占总求解时间比重过大。表 4-2 中用具体算例结果说明了该问题。在 RF 互连算例中，包括求解  $Ax=b$  在内的总时间为 1820 秒，但计算 pFFT 的  $D$  矩阵却达 1444 秒（其中计算  $H$  矩阵时间可忽略），另外一个算例也有类似结果。由此可见，尽管 pFFT 算法与其它算法相比，具有非常大的时空优势，但在其算法内部，时间分布并不均匀，计算  $D$  矩阵几乎耗费 pFFT 算法总时间的绝大部分。特别地，对于螺旋电感一类近场网格内面元非常稠密的算例中，这种不均匀更加严重，因为在此类算例中，相互“直接影响”的近场面元数更多。

表 4-2 两个算例 CPU 时间明细表，时间单位秒[32]

	RF 互连	16x8 array
$P$ 和 $I$ 矩阵	23.5	746
$D$ 和 $H$ 矩阵	1444	14353
形成和预校正 $P_r$	3.61	53
LU 分解 $P_r$	3.28	1927
GMRES (tol=1e-3)	369(48 iter)	25168(80 iter)
总计	1820	42247

第三，矩阵  $D$  的计算是频率相关的。在 pFFT 算法的四个矩阵中，计算量最大的  $D$  矩阵是频率相关的，而投影矩阵  $P$  和插值矩阵  $W$  矩阵均为频率无关，可复用的； $H$  矩阵虽也为频率相关，但其计算时间可忽略。这使得 pFFT 方法在处理多频率点问题时，基本等同于处理多个单一频率点问题，缺乏效率。



### 4.3 快速形成矩阵 $\mathbf{D}$ 的计算方法

在多频率点电感提取中，为了能快速计算矩阵  $\mathbf{D}$ ，我们采用组合 CMRM 和 pFFT 的方法。在组合的过程中，提出了两种不同的组合方式，一种是精确组合方式，它能在全频率范围保持非常高的计算精度；而另一种是稍有误差，但更为迅速的近似组合方式。下面分别说明这两种组合方式。

#### 4.3.1 精确组合方式

下以 Helmholtz 方程基本解的积分矩阵  $P_1(a,b)$  为例来说明。采用类似 CMRM 方法可得到，其 pFFT 快速算法中的直接矩阵  $\mathbf{D}$  矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(a,b) &= \int_{panel_b} \frac{e^{ikr(x_a,y)}}{4\pi r(x_a,y)} dy \xrightarrow{\text{CMRM expansion}} \\ &\sum_{j=0}^N (-k^2)^j \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a,y)} \cdot \frac{r(x_a,y)^{2j}}{(2j)!} dy \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中， $a, b$  为矩阵的行、列编号，同时也是面元的全局编号。为清晰起见，式(4-2)中仅给出了实部部分，而虚部部分也可得到。

式(4-2)将频率相关的积分转化为级数部分和，其中含频率相关的项  $(-k^2)^j$  和频率无关的积分  $\int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a,y)} \cdot \frac{r(x_a,y)^{2j}}{(2j)!} dy$ 。若事先计算并保存该积分序列的结果，能加速不同频率下矩阵  $\mathbf{D}$  中元素的计算。这一点完全等同于第 3 章中 CMRM 方法所采用的转换。

对于较大的波数  $k$  和距离  $r$ ，采用式(4-2)计算同样会遭遇数值困难。类似地，引入 CMRM 窗口技术，将积分划分为远场积分和近场积分，对于近场积分可用式(4-2)计算，但对于远场积分则采用 pFFT 方法计算。值得注意的是，如前所述，pFFT 方法实际上仅为远场快速计算方法，因此，将快速近场计算方法 CMRM 和快速远场计算方法 pFFT 组合在一起是合理和自然的。

图 4-2 描述了组合 CMRM 和 pFFT 方法的过程。图中  $3 \times 3$  直接网格表示 pFFT 方法的近场区域，若仅用 pFFT 方法加速，该区域内的积分均需直接计算。而图中半径为  $r_w$  的圆覆盖区域表示 CMRM 方法的近场窗口，在该圆内标记为三角形点的积分，可通过 CMRM 级数公式 (4-2) 快速计算，而在圆外标记为四边形点的积分，则需采用精确的直接数值积分方法。因为圆内的 CMRM 级数公式可保证很高的计算精度，通常能达到约 10 位有效数字的精度；而圆外也是采用精确的

直接计算或采用能保证精度的 pFFT 远场方法计算，所以，在这种组合方式下，所有积分都是精确的计算得到，因此，称这种组合方式为精确组合方式（ACCurate Method, ACCM），这里“精确”是相对于另一种近似组合方式而言。

同样，判断 CMRM 近场窗口大小的标准为：

$$|kr_{avg}| < R_w \quad (4-3)$$

这里  $r_{avg}$  是场点与积分面元之间的平均距离；相对窗口大小  $R_w$  是无量纲的；考虑到绝对窗口大小  $r_w = R_w / |k|$  是  $k$ （频率）相关的，当频率升高时， $k$  变大，相应地绝对窗口尺寸会变小。通常，我们取绝对窗口大小  $r_w$  约为一个波长长度。

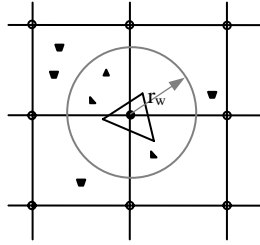


图 4-2 组合 CMRM 和 pFFT 方法

在引入平均距离  $r_{avg}$  后，式(4-2)实际上是采用如下等价形式进行计算：

$$D(a,b) = \int_{panel_b} \frac{e^{ikr(x_a,y)}}{4\pi r(x_a,y)} dy \longrightarrow \sum_{j=0}^N (-k^2 r_{avg}^2)^j \int_{panel_b} \frac{(r(x_a,y)/r_{avg})^{2j}}{4\pi r(x_a,y)(2j)!} dy \quad (4-4)$$

它可以克服由  $k$  和  $r$  各自较大数值变化而引起的数值困难<sup>[67][68]</sup>。

为衡量实际上有多少数值积分是由 CMRM 级数公式快速计算得到，定义命中率（hit ratio）为：

$$hit\ ratio = \frac{hit}{hit + miss} \times 100\% \quad (4-5)$$

其中， $hit$  和  $miss$  分别为由 CMRM 级数公式和直接积分方法计算的积分数。

当命中率为 100% 时，pFFT 方法中需直接计算的积分全是由 CMRM 级数公式计算，因此能得到最高的加速效果，而当命中率为 0% 时，所有需计算的积分是由直接积分方法计算，此时，精确组合方式实际退化为原始 FastImp 中的方法。

通常，命中率会随频率增加而逐渐下降，这是由于绝对窗口大小  $r_w$  会随频率增加而减小，而同时直接网格的大小不随频率变化。

### 4.3.2 近似组合方式

精确组合方式虽能在全频率范围保证非常高的计算精度，但持有该优点却需付出速度代价。特别在绝对窗口大小  $r_w$  非常小或网格间距（stencil step）非常大时，精确组合方式会逐渐失去速度优势，蜕化为原始 FastImp 方法。通常，前一种情形发生在极高频率下，而后一种情形发生在粗糙离散的电大尺寸问题（large electrical-size problems）中，因为在粗糙离散下，面元尺寸远大于电磁波分析中常要求的离散尺寸（1/10 波长）。为克服这种困难，本节将提出另一种更为迅速，但稍有近似的组合方式。

对于 CMRM 窗口外的远场积分，不再采用精确的直接方法计算，而代之以 CMRM 原型中已采用的远场近似计算公式，即：

$$D(a,b) \approx e^{ikr_{avg}(x_a,y)} \cdot \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(x_a,y)} dy. \quad (4-6)$$

由于电磁场远场快速衰减的原因，这种近似计算一般不会导致最终结果的巨大误差，但该公式却可迅速计算得到，因为其积分部分恰好为 CMRM 级数公式中的第一项，因此并不需进行数值积分。

但是，若评价点相对于积分面元是奇异（singular）或近奇异（nearly singular），即位于积分面元内或非常接近积分面元，采用式 (4-6) 近似计算会给最终结果带来较大误差。为此，此类奇异和近奇异积分必须排除在近似公式之外，而改用精确的直接数值积分计算。值得注意的是，当某评价点位于 CMRM 远场中（距离积分面元较远），而同时却又是奇异或近奇异积分（离积分面元非常近），这一点看起来似乎是矛盾的，但事实上，在粗糙离散的电大尺寸问题中此类积分是很常见的。这是由于巨大的面元在数值上会产生巨大的  $r_{avg}$ ，从而  $|kr_{avg}|$  在数值上也很大，相应地，会得到该评价点位于远场的“错误”结果。

为克服该困难，引入一个近奇异因子（Nearly Singular Factor, NSF）：

$$NSF = \frac{d}{R_0} \text{ or } \frac{r_0}{R_0}. \quad (4-7)$$

其中， $d$  是评价点和积分面元之间的垂直距离， $r_0$  是评价点和积分面元中心点之间的距离， $R_0$  是积分面元包围圆（bounding circle）的半径，如图 4-3 所示。若

垂足位于积分面元内，采用  $\frac{d}{R_0}$ ，否则采用  $\frac{r_0}{R_0}$ 。当 NSF 为 0 时，评价点位于积分面元内，即为奇异积分；当 NSF 接近 0 时，为近奇异积分。通常，当 NSF>1.0 时，可认为该积分为普通积分。

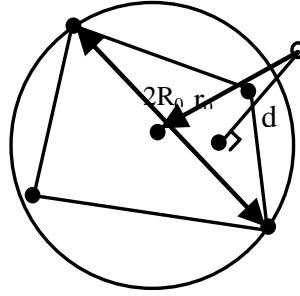


图 4-3 近奇异因子

采用近奇异因子后，只有在 CMRM 窗口外（CMRM 远场积分），且同时为近奇异的积分需采用直接积分方法计算，而其余的 CMRM 远场积分均采用近似公式计算。此种近似组合方式能在不过多损失结果精度的情况下，获得比精确组合方式更高的速度。相应地，命中率中 *hit* 的含义也重新定义为那些采用 CMRM 级数公式或 CMRM 近似公式计算的积分。

### 4.3.3 组合方法的优点

上面提出两种组合方式，无论从 CMRM 原型角度，还是从原始 pFFT 算法角度，均能取得比较好效果。具体可解决如下几个问题。

从 CMRM 原型的角度：

- 1) 由于采用了 pFFT 加速和 GMRES 迭代求解，CMRM 电感提取方法的速度有了很大提高。从试验数据将可看到，两种组合方式已在速度上明显超过 FastImp；
- 2) 由于在组合方法中，仅需对 pFFT 直接网格内的积分进行 CMRM 级数展开，而该近场部分是局部的和少量的，特别对于大量的 pFFT 远场积分不再需用 CMRM 级数展开，而且，该组合方法同 pFFT 算法一样，也不需形成最终系数矩阵  $A$ ，使得它在内存用量上减少很多。从实验数据将可看到，级数长度同样为  $N=12$ ，两种组合方法的内存用量仅为 FastImp 的 2-3 倍；
- 3) 更重要的是，由于组合方法实际上是利用更准确的 pFFT 远场快速计算方法，替换（或补充）了原始 CMRM 中的远场近似计算公式，从而可保证组合方

法在极端情形下的结果精度。

从原始 pFFT 方法的角度：

- 1) 该组合方法将仅能加速远场计算且与频率相关的原始 pFFT 方法扩展为能同时加速远场和近场计算、且基本与频率无关的快速方法；
- 2) 由于 pFFT 方法与其它快速计算方法相比，例如：快速多极方法 (Fast Multipole Method, FMM)，它对不同积分核具有更好的通用性<sup>[29]</sup>；而 CMRM 方法也较容易扩展到其它不同积分核上，因此，该组合方法具有较好通用性，对已采用 pFFT 加速的其它工程应用具有参考价值。

## 4.4 数值结果

我们将本章中提到的两种组合方式：精确组合方式 (ACCM) 和近似组合方式 (APPM) 实现到 FastImpRelease\_v1.0 中<sup>[48]</sup>。其中，级数中所有的数值积分序列均可类似归化到文献 [22] 中采用的一维积分方法，并且同样可采用类似 (3-20) 中递推形式进行快速计算。在两种组合方式中，相对窗口大小  $W = 2\pi$ ，级数长度  $N = 12$ ，近奇异因子  $NSF = 1.0$ 。两种组合方式的结果精度、速度和内存用量均与 FastImp 比较。所有试验均在 SUN Ultra Enterprise V880 服务器上运行，其 CPU 主频为 750MHz。

### 4.4.1 圆环电感

本算例为一个圆环电感，其直径为  $10\mu\text{m}$ ，截面为  $0.5\mu\text{m} \times 0.5\mu\text{m}$  矩形，如图 4-4 所示。导体材料为铜，即导电率为  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ sm}^{-1}$ 。在 MQS 假设下进行阻抗提取。

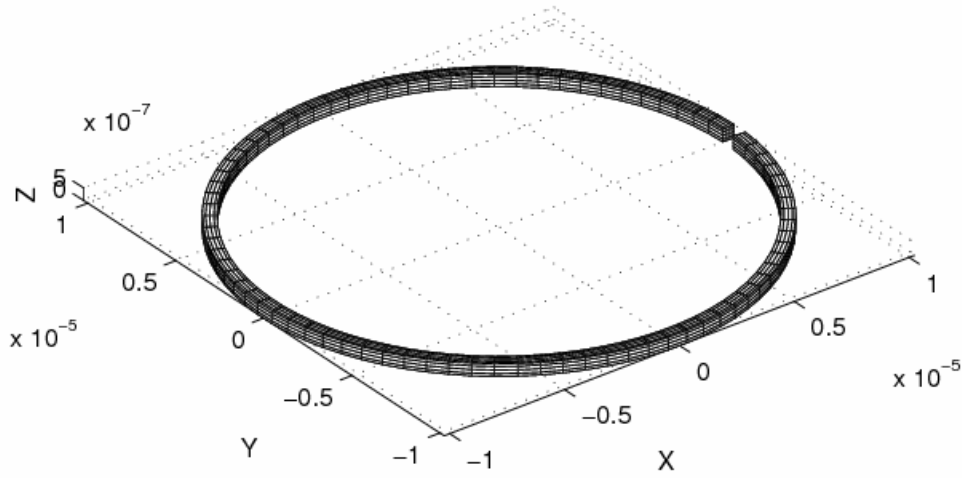


图 4-4 圆环电感

图 4-5 和图 4-6 分别是频率在 10MHz 到 100GHz 范围内，圆环电感电阻和电感的频变曲线图。从图中可以看到，ACCM 方法得到的电阻与电感结果在整个频率范围内与 FastImp 符合得非常好；而 APPM 也与 FastImp 符合得较好，除在最高频率  $f=100\text{GHz}$  处，电阻有一个最大为 2.2% 相对误差，显然，该误差是由于引入了 CMRM 远场近似计算公式所导致的。

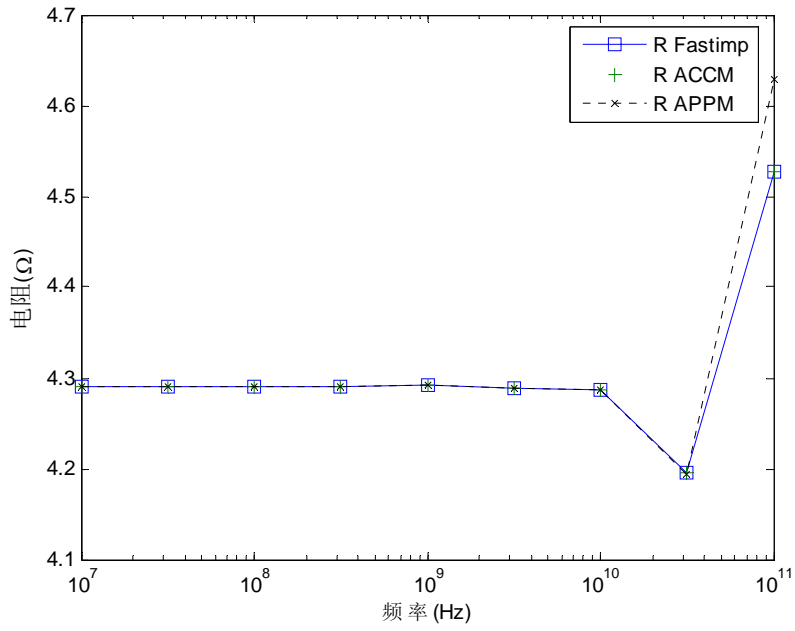


图 4-5 圆环电感频变电抗曲线

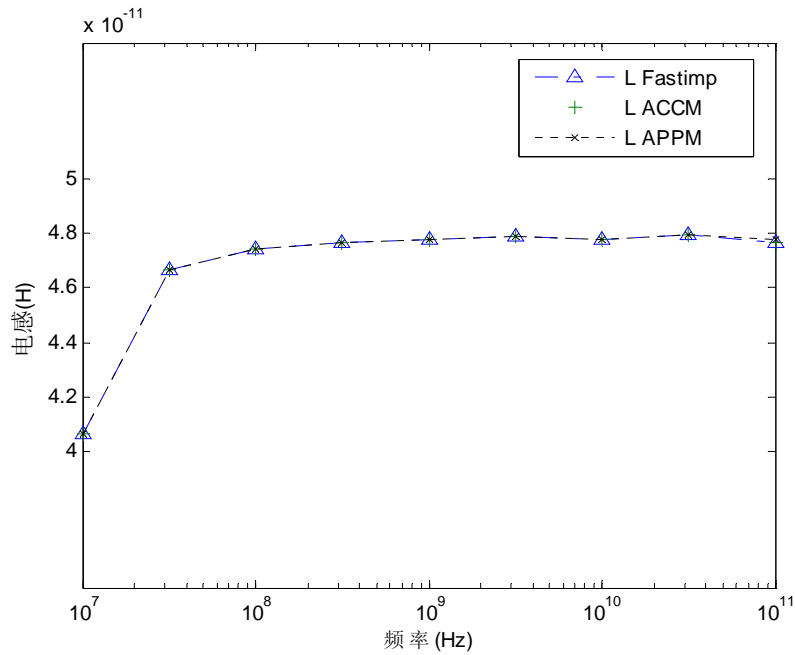


图 4-6 圆环电感频变电感曲线

图 4-7 用于速度比较，其中横轴是采样频率点的数目，纵轴是随频率点数增加各种累加时间，分别有 FastImp, ACCM, APPM 和求解线性方程组  $Ax=b$  的

累加时间。这里，在频率从  $10^7\text{Hz}$  到  $10^{11}\text{Hz}$  范围内，按对数坐标均匀采样了 9 个频率点。为了更清楚地描述命中率和算法性能的关系，在不同频率点下，两种组合方式的命中率曲线也同时在图 4-7 中绘出。在最佳情况下，即所有生成系数矩阵的积分运算均可被复用时，命中率为 100%，此时，从第二个频率点开始的积分时间大致可忽略，总时间曲线将平行于求解  $Ax=b$  的时间曲线；而在最坏情况下，即命中率为 0% 时，两种组合方式将完全退化为原始 FastImp，时间曲线将平行于 FastImp。因此，FastImp 和求解  $Ax=b$  的曲线就近似给出了时间曲线的上界和下界。从图 4-7 中可看到，两种组合方式均显示出明显优于 FastImp 的速度结果。而且，即使在极高频段内（10GHz 到 100GHz），APPM 曲线也几乎平行于求解  $Ax=b$  的曲线，这是由于 APPM 在此极高频段内仍能保持 100% 的命中率。而在此频段内，由于 ACCM 的命中率逐渐从 100% 降至 40%，其时间曲线的斜率上升变得非常显著。

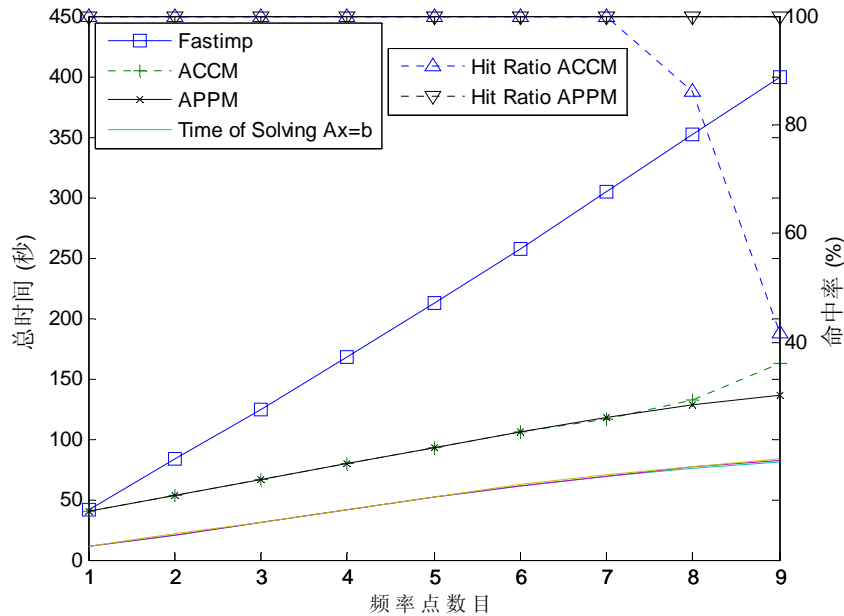


图 4-7 圆环电感的时间和命中率曲线

为了揭示两种组合方式如何能加速提取过程，表 4-3 中列出 FastImp 和 APPM 在提取前两个频率点时耗费 CPU 时间的细节。其中，频率无关的行是指可用于频率点间复用的计算部分，例如：pFFT 算法中的投影矩阵和插值矩阵等，而下面标注星号的三行均是与频率相关的操作，需反复计算。



从表中可见，形成直接矩阵  $D$  和用 GMRES 迭代求解  $Ax=b$  占总 CPU 时间的绝大部分，并且，计算  $H$  矩阵与计算  $D$  矩阵相比，其时间明显可忽略。重要的是，形成直接矩阵  $D$  的时间上，从第二个频率点开始，APPM 与 FastImp 的加速比大约达到 42 倍 (26.4/0.62)，这表明，采用 CMRM 级数和远场快速计算公式比直接积分方法快一个数量级以上。这就是两种组合方式能加速多频率点电感提取的关键所在。

表 4-3 FastImp 和 APPM 在前两个频率点时 CPU 时间明细表 (秒)

	FastImp		APPM	
	#1	#2	#1	#2
频率点编号	#1	#2	#1	#2
频率无关	1.83	-	3.87	-
$H$ 矩阵*	0.06	0.06	0.06	0.06
$D$ 矩阵(生成+预校正)*	26.13+2.1	26.4+2.16	26.22+2.34	0.62+2.78
GMRES*	10.85	10.11	10.78	10.28
总时间	41.67	41.24	39.62	13.32

#### 4.4.2 带衬底螺旋电感

此算例是一个带衬底两圈 (two-turn) 圆形螺旋电感，其离散示意图如图 4-8 所示。螺旋电感的直径为  $50\mu m$ ，截面为  $1\mu m \times 1\mu m$  矩形，衬底尺寸为  $160\mu m \times 160\mu m \times 15\mu m$ ，螺旋电感和衬底之间垂直间隙为  $5\mu m$ ，螺旋电感为铜，衬底电导率为  $2.9 \times 10^5 sm^{-1}$ 。仍采用 MQS 假设。

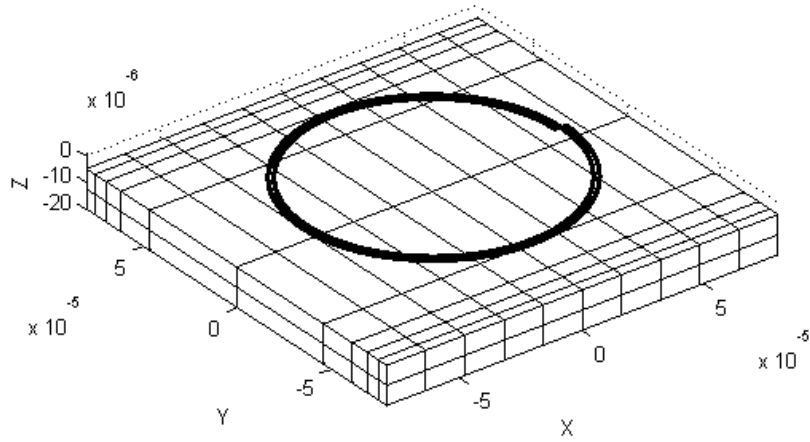


图 4-8 带衬底螺旋电感示意图

电阻和电感随频率变化曲线分别如图 4-9 和图 4-10 所示。在整个频率范围内，它们的结果与 FastImp 都符合得非常好。从图中可见，由于存在衬底，频率从  $10^7\text{Hz}$  到  $10^{11}\text{Hz}$  变化时，电阻和电感值均变化剧烈。

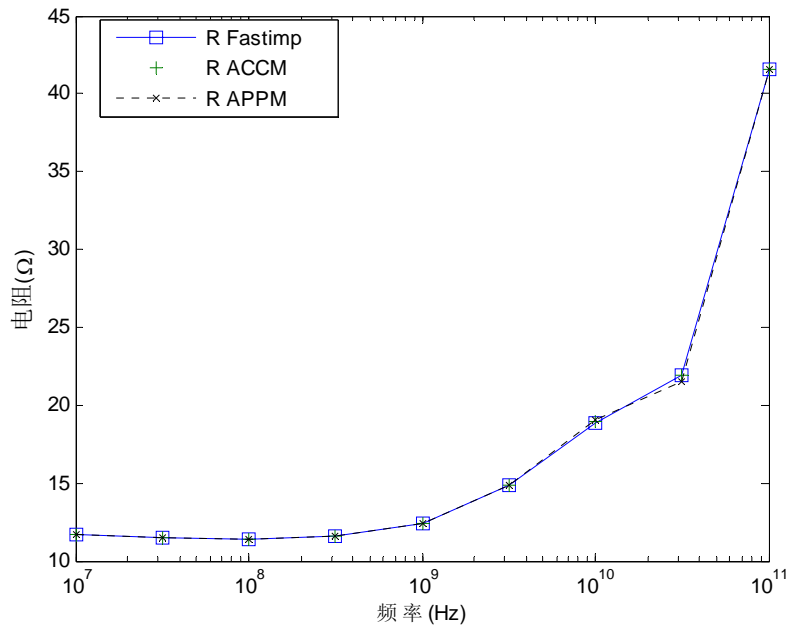


图 4-9 带衬底螺旋电感的频变电阻曲线

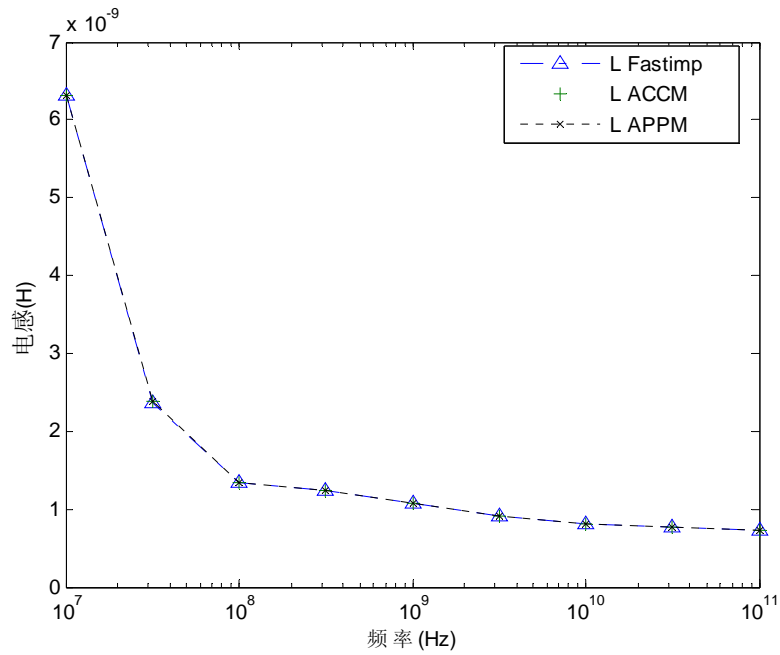


图 4-10 带衬底螺旋电感的频变电感曲线

图 4-11 给出了速度比较结果。同前一算例类似，两种组合方式显示出明显优于 FastImp 的速度结果，并且在高频段，APPM 仍比 ACCM 保持更高的速度。为清晰起见，命中率的曲线未在图中画出，但它们和前一算例结果类似。

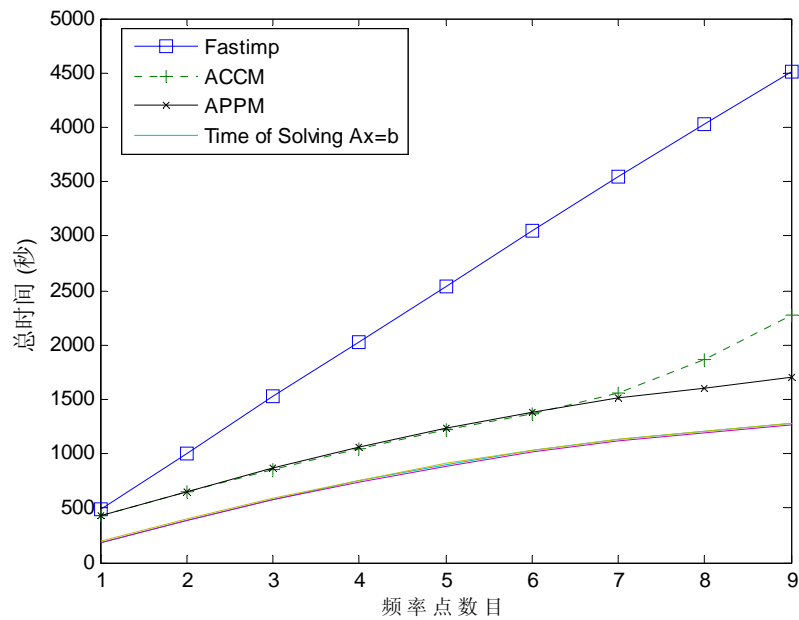


图 4-11 带衬底螺旋电感的速度比较曲线

### 4.4.3 短接的长传输线

此算例来自文献 [22]，其结构如图 4-12 所示。该传输线高 $15\mu\text{m}$ 、宽 $37\mu\text{m}$ 、长 $10^4\mu\text{m}$ ，两线之间间距为 $27\mu\text{m}$ 。导体材料为铜，本算例中采用全波分析。

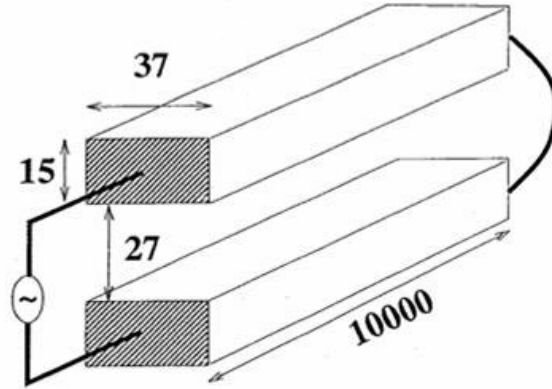


图 4-12 短接的长传输线

在频率从1GHz到18GHz变化范围内，频变阻抗的幅值和相位分别在图 4-13 和图 4-14 中给出，时间比较结果在图 4-15 中给出。类似地，两种组合方法明显快于 FastImp，且能在整个频率范围内保持相当高精度。

需注意地是，在全波分析中，介质空间的积分核不再是形如 $1/r$ ，而是形如 $e^{ikr}/r$ 。在 FastImp 中，即使在同一个频率点上，这种导体内和导体外（介质中）不同  $k$  的 Helmholtz 积分核均需逐点反复计算。但在两种组合方式中，它们都能容易被复用。这就是为什么在本算例中，即使在第一个频率点，APPM（66s）也能稍快于 FastImp（107s）的原因，而在 MQS 和 EMQS 假设中，在第一个频率点上，APPM 通常会相似或稍慢于 FastImp。

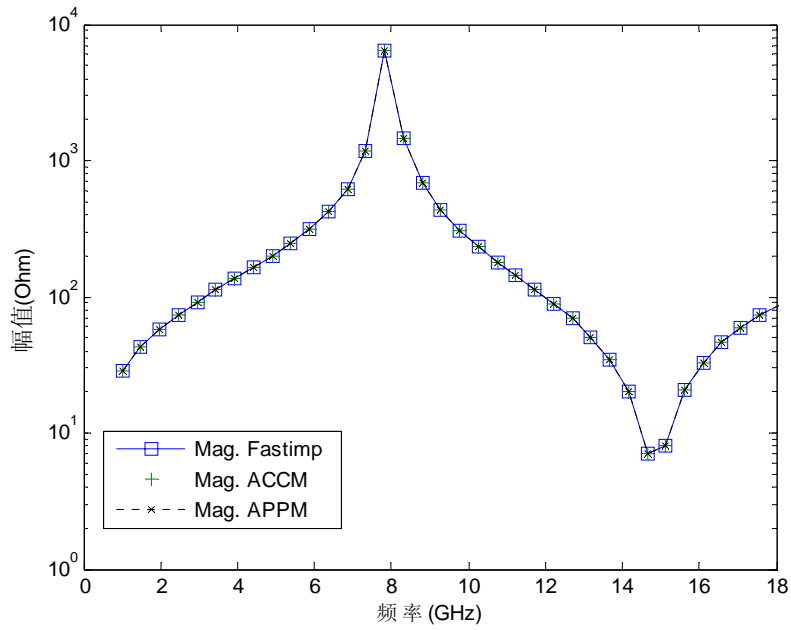


图 4-13 短接长传输线的频变幅值

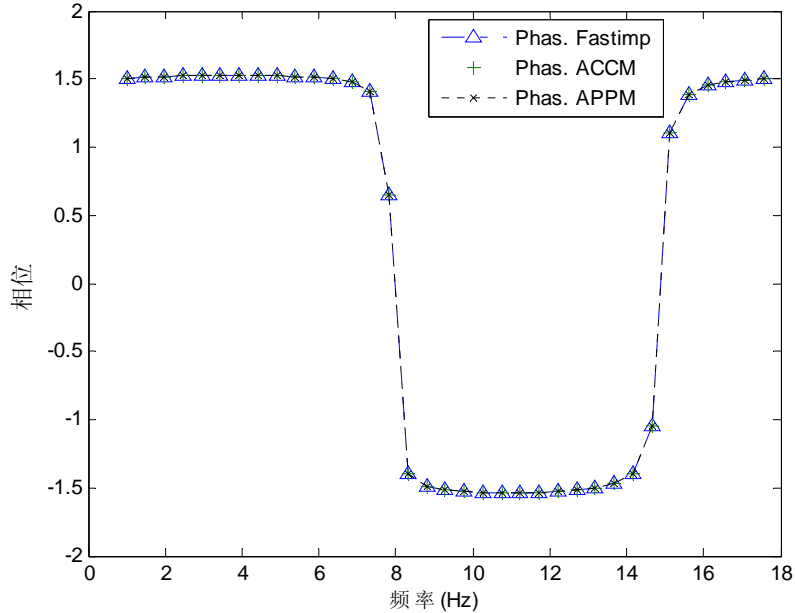


图 4-14 短接长传输线的频变相位

更进一步，在全波分析中比在 MQS 和 EMQS 假设中，两种组合方法能得到相对 FastImp 稍高一些的加速比，因为在形成线性方程组时，更多的积分（特别

是介质中) 能够被复用。例如: 在此算例中, APPM 与 FastImp 的加速比为 3.6 (3889 秒/1074.9 秒), 而第一个算例为 2.9 (398 秒/136 秒), 第二个算例为 2.6 (4505 秒/1705 秒)。

另一个特别有利于全波分析的原因在于, 因介质中波长远大于导体中波长, 所以在介质中, 绝对窗口大小  $r_w$  将非常大, 从而能保证非常高的命中率。在此算例中, 两种组合方式在介质中均能在全频率范围内保持 100% 命中率, 然而在导体中, 由于频率很高且导体表面离散得非常粗糙, 使得导体内的命中率均小于 5%。

由上分析可知, 组合方法特别适合全波分析, 即使在仅提取一个频率点电感的情形下, 也具有一定的速度优势。

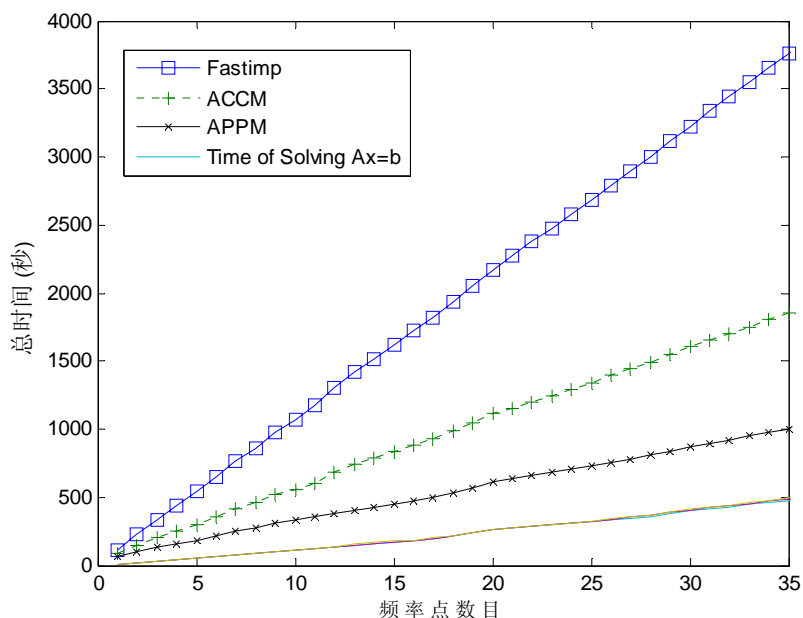


图 4-15 短接长传输线的时间比较

#### 4.4.4 内存比较

表 4-4 列出上述三个算例中 FastImp 和 APPM 组合方式的内存使用情况。为保存积分序列的结果, 与 FastImp 相比, 两种组合方式均需额外内存, 其用量取决于直接网格内面元密度和最高命中率 (当然也与级数长度  $N$  有关, 但为保证精度, 级数长度  $N$  不能随意减少), 其中, 后者是由于在程序运行中为考虑复用, 不会随时释放积分序列所占据的内存, 而直到程序结束。

通常，全波分析与 MQS 或 EMQS 假设相比，需更多额外内存，这是由于介质中更多积分被复用的缘故。当然，积分序列占用内存越多，则可能复用的积分越多，从而可能得到更高的加速效果。

表 4-4 三个算例中内存比较结果

	圆环	螺旋电感	传输线
面元数目	1, 312	7, 498	864
未知数目	9, 186	52, 490	6, 916
内存 (FastImp, 额外) MB	(17, 40)	(230, 317)	(20, 53)

#### 4.5 本章小结

针对第 3 章中提出的 CMRM 多频率点电感提取原型中存在的不足，本章结合 CMRM 方法与 pFFT 快速算法，提出两种组合方式：精确组合和近似组合方式。在多频率点问题上，它们均能在保证较高精度的同时，取得明显优于 FastImp 的速度结果。而近似组合方法更能在精确组合方法逐渐失效的某些极端情形下，在稍引入误差的情况下，仍保持良好的加速效果。

其实，由于数值困难，CMRM 方法实际仅为一种近场加速方法，而 pFFT 方法实际仅为一种远场加速方法，因此，将它们组合在一起是合理的。该组合方法能将 pFFT 方法由一个仅能加速远场计算、频率相关的快速方法化为能同时加速远场和近场且基本频率无关的方法。并且，该组合方法具有一定通用性，对已使用 pFFT 加速的其它工程应用具有借鉴意义。当然，速度提升是以额外内存开销为代价。

## 第5章 混合边界元电感提取模型

2003年, MIT的 Zhu Zhenhai 等改进并实现了直接边界元电感提取原型 FastImp。它与已被大量研究基于 PEEC 体积元方法的 FastHenry 相比, 具有许多优点。但仍困扰该方法的问题是其未知变量数高达约  $7-8P$ , 当面元总数  $P$  较大时会给方程组求解带来困难。在电感提取问题中, 为减少边界元方法的变量数, 已有了一些研究工作。但现有的间接边界元电感提取模型, 虽能将变量数减至  $3-4P$ , 但它们却存在苛刻的形体约束或者模型尚不成熟。

结合直接法和间接法之间的优势, 本章提出一种所谓的混合边界元电感提取模型。它的基本思路是在每个导体区域, 采用在导体表面分布的虚拟偶极子为源的双层位势来表达导体内电场, 这种表达方式属于间接边界积分方程 (Boundary Integral Equation, BIE)。而在所有导体之间 (介质区域), 电场则利用 FastImp 中已采用的直接边界积分方程来表达, 综合这两种不同类型的边界积分方程得到一种混合边界元模型。尽管这种混合模型不属于“纯”间接边界元方法, 但它仍具有间接方法所拥有变量数少的优势, 此方法能将变量数从  $7P$  降为  $4P$  (MQS 假设下), 并同 FastImp 一样, 能适应于三维、宽频率范围电感提取任务。两个互连结构算例验证了本模型的正确性, 并可观察到变量数减少后所带来的潜在速度优势。

### 5.1 混合边界元模型

#### 5.1.1 直接边界元电感提取模型中的主要不足

一般而言, 边界元方法可大致分为直接边界元和间接边界元两类。直接边界元来自直接边界积分方程式 (3-2), 而间接边界元往往来自单、双层位势理论, 或可看作在问题域和问题补域内同时应用式(3-2)推导得到<sup>[25]</sup>。

以较直观的电容问题为例, 式(3-2)表示待求介质场域内电位由内边界上的法向电场  $E_n$  和内边界上电位  $\varphi$  同时决定。通常, 前者以法向电场  $E_n$  为源的位函数称为单层位势; 而后者以电位  $\varphi$  为源的位函数称为双层位势, 即: 直接边界元中场域电位可看作由单、双层位势共同决定。由此, 式 (3-2) 导致的结果是, 在每个面元上, 需同时设立两个未知数: 法向电场  $E_n$  和电位  $\varphi$ 。在建立方程时, 除



关系式(3-2)外,对于第一、第二类边界条件须分别补充电位  $\varphi = constant$  和  $E_n = 0$  边界条件,来满足未知数与方程数的匹配。而对于介质-介质交界面,也须另补充两个边界条件来建立方程,由物理模型易知,介质-介质交界面处电位  $\varphi$  连续和电位移矢量法向通量  $D_n$  连续(通常,介质交界面上无自由电荷)。

而间接边界元方法通常只需设一个虚拟源,电荷源(单层位势)或者偶极子源(双层位势),来建立第一类或第二类边界积分方程。因此,每个面元上仅需一个未知数:虚拟电荷密度或虚拟偶极子密度。例如:采用间接边界元的多介质电容提取原型FastCap中,每个面元上仅设一个虚拟电荷密度作未知变量,特别地,在介质-介质交界面上也仅需一个虚拟电荷密度,而单层位势性质能保证跨越交界面时位函数连续<sup>[71]</sup>,所以,在列写方程时仅需电位移矢量法向通量  $D_n$  连续的边界条件,而不再需电位  $\varphi$  连续的边界条件。最终,间接法FastCap能获得比直接法约少一半的变量数,当然,其代价是系数矩阵由分块稠密变为稠密。

在电感提取中,由于FastImp是采用直接边界元方法,为降低其变量数,现有方法均是试图从物理模型出发,寻找合适的虚拟源,建立间接边界积分方程。

从图 2-5 可看到, FastImp中每个面元上变量为  $(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial n}, \rho)$ , 在MQS假设下  $\rho = 0$ , 面元顶点处未知变量为电位  $\varphi$ , 而大规模问题中面元数  $P$  和面元顶点数  $V$  相差不多,因此,总的未知数约为  $7-8P$ 。而文献 [34]提出了一种间接边界元电感提取模型,它利用导体表面虚拟面电流和介质中的二阶矢量磁位,将每个面元上变量数减为 3 个。但是,严苛的形体约束使得它不太适用于三维复杂结构的电感提取。目前为止,尚没有可靠的、能适应三维复杂结构的间接边界元电感提取模型。

本章也是依循试图将 FastImp 的直接边界元转化为间接边界元的思路,来达到减少未知数的目的。

### 5.1.2 混合边界元模型

在直接边界元模型中,任一导体内所满足的矢量Helmholtz方程(2-8)被转化为直接边界积分方程(2-17)。但混合边界元模型中,则通过在导体表面引入虚拟偶极子分布,将该微分方程转化为间接边界积分方程。

考虑到在直角坐标系中,矢量Helmholtz方程(2-8)可被分解为三个独立的标量Helmholtz方程,即:

$$\nabla^2 E_x - i\omega\mu\sigma E_x = 0, \quad (5-1)$$

$$\nabla^2 E_y - i\omega\mu\sigma E_y = 0, \quad (5-2)$$

$$\nabla^2 E_z - i\omega\mu\sigma E_z = 0, \quad (5-3)$$

其中， $\hat{x}$ ， $\hat{y}$  和  $\hat{z}$  分别表示直角坐标系下三个坐标方向的单位矢量。

不失一般性，仅以式(5-1)为例来说明如何将其转化为间接边界积分方程。

设导体 $i$ 所在区域为单连通域 $\Omega_i^-$ ，内边界为 $\Gamma_i^-$ 。在该边界 $\Gamma_i^-$ 上强加虚拟偶极子分布 $\mu_x(\mathbf{x})$ ，且该偶极子的轴向平行于点 $\mathbf{x}$ 处的单位外法向 $\hat{n}(\mathbf{x})$ ，如图 5-1 所示。由位势理论<sup>[47][74][75]</sup>，对区域 $\Omega_i^-$ 内任一评价点 $\mathbf{y}$ ，其在 $\hat{x}$ 方向的场强 $E_x(\mathbf{y})$ 可由虚拟偶极子源产生的双层位势表达，即：

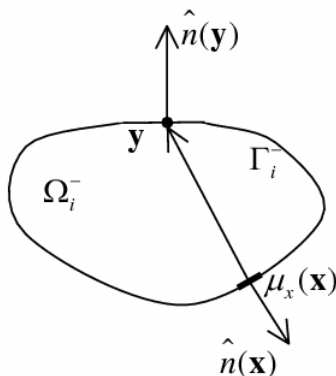


图 5-1 导体中双层位势离散示意图

$$E_x(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_x(\mathbf{x}) dS_x \quad (5-4)$$

进一步，若假定 $E_x(\mathbf{y})$ 在 $\mathbf{y}$ 点处可微，可以得到：

$$\frac{\partial E_x(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})} \left[ \int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_x(\mathbf{x}) dS_x \right] \quad (5-5)$$

其中， $\hat{n}(\mathbf{y})$ 临时定义为点 $\mathbf{y}$ 处任一方向的单位向量。

当点 $\mathbf{y}$ 移动到内边界 $\Gamma_i^-$ 上时，式(5-4)和(5-5)变为间接边界积分方程， $\hat{n}(\mathbf{y})$ 定义为在边界点 $\mathbf{y}$ 处的单位外法向量。需要注意的是，当评价点 $\mathbf{y}$ 与积分点 $\mathbf{x}$ 重合时，式(5-4)和(5-5)为不同奇性的奇异积分，该奇性包含在积分中尚未处理。

类似地,若在边界 $\Gamma_i^-$ 上引入另外的偶极子分布 $\mu_y(\mathbf{x})$ 和 $\mu_z(\mathbf{x})$ ,微分方程(5-2)和(5-3)也能分别被转化为如下间接边界积分方程:

$$\begin{aligned}
 E_y(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_y(\mathbf{x}) dS_x \\
 E_z(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_z(\mathbf{x}) dS_x \\
 \frac{\partial E_y(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} &= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})} \left[ \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_y(\mathbf{x}) dS_x \right] \\
 \frac{\partial E_z(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} &= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})} \left[ \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \mu_z(\mathbf{x}) dS_x \right]
 \end{aligned} \tag{5-6}$$

得到 $\bar{E}$ 和 $\partial\bar{E}/\partial n$ 的间接积分表达式后,也即式(5-4)、(5-5)和(5-6),将它们带入其它积分方程,即式(2-22)和(2-23),以及边界条件式(2-13)、(2-14)和(2-15)中,就可得到一组混合边界积分方程。这里“混合”的含义是指,在每个导体内,采用的是间接边界积分方程,而在所有导体间(介质中)利用的却仍是FastImp中已用的直接边界积分方程。图 5-2 描述混合边界元模型离散结果和未知变量分布,其中,未知变量 $\bar{\mu}$ 指 $(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ 。与FastImp的离散结果图 2-5 相比,它可将每个面元上未知变量数从 6 个降为 3 个(MQS假设下)。因此,混合法已将未知数目从直接法中的 $6P+V$ ,降低为 $3P+V$ 。

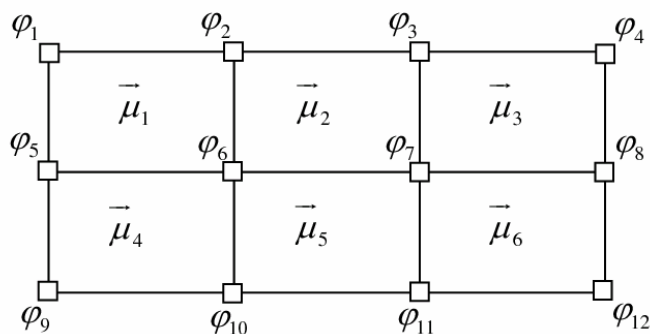


图 5-2 混合边界元中离散和未知变量分布图

相应地,线性方程组左边矩阵部分缩减为:

$$\begin{bmatrix} T_{1x}Q_1 & T_{1y}Q_1 & T_{1z}Q_1 & A_{t1} \\ T_{2x}Q_1 & T_{2y}Q_1 & T_{2z}Q_1 & A_{t2} \\ Q_{2x} & Q_{2y} & Q_{2z} & 0 \\ N_{ncx}D_1 & N_{ncy}D_1 & N_{ncz}D_1 & 0 \\ N_{cx}D_2 & N_{cy}D_2 & N_{cz}D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

其中：

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_0 D_2 - D_0 D_1, \\ Q_{2t} &= C_{dt} D_2 + C_t D_1, \quad t := x, y, z, \\ D_2(a, b) &= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y}_a)} \left[ \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[ \frac{e^{-ikr(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})} \right] d\mathbf{x} \right] \end{aligned}$$

关于混合边界元电感提取模型，有几点值得注意。首先，导体区域 $\Omega_i$ 需限定为单连通域，因为双层位势在多连通域不能得到唯一解<sup>[74]</sup>。幸运的是，在VLSI互连结构中，绝大部分导体区域均满足该约束条件。其次，虚拟偶极子源分布无确切物理含义，它们的引入来自位势理论。对导体内所满足的矢量Helmholtz方程，该间接边界积分方程在数学上完全等价于直接边界积分。最后，混合法和直接法之间唯一差别在于采用了不同积分方程来表达导体内电场（间接法和直接法的差别），由上第二点，它们在数学上完全等价，特别重要的是，刻画导体间邻近效应的方程式(2-22)没有变化，因此，混合法能同FastImp一样捕获高频邻近效应。这一点将在后述试验中得到验证。

## 5.2 超奇异积分计算

### 5.2.1 各种积分类型小结

在边界元方法中，积分处理占据非常重要的地位。这不仅是由于处理各种类型的数值积分需耗费大量 CPU 时间，而且，在发生奇性各异的奇异积分时，更需正确处理，否则将对最终结果引入很大误差。

表 5-1 总结了在采用边界元方法进行电感提取中，常用到的几种积分类型。其中， $1/r$  和  $e^{ikr}/r$  分别为 Laplace 和 Helmholtz 基本解相关积分核。两大类基本解均有三类常见的积分核形式：原形  $U(\cdot)$ ；一次梯度算子  $\nabla(\cdot)$ ，如：常见的  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right)$

实际可写为  $\hat{n} \cdot \nabla(\frac{1}{r})$ ，其中梯度  $\nabla(\frac{1}{r})$  为一个矢量；二次梯度算子  $\nabla\nabla(\cdot)$ ，如：

$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \int_S \frac{\partial}{\partial n'} (\frac{e^{ikr}}{r}) ds' \right]$  实际可写为  $-\hat{n} \cdot \left[ \int_S \nabla\nabla(\frac{e^{ikr}}{r}) ds' \right] \cdot \hat{n}'$ ，其中  $\nabla\nabla(\frac{e^{ikr}}{r})$  为  $3 \times 3$  的二阶张量。

当评价点位于积分面元中时，它们会发生不同奇性程度的奇异积分，奇异性也在表 5-1 中列出<sup>[71]</sup>。无论是普通积分还是奇异积分，随被积函数的阶数（梯度算子数）增加，计算该数值积分的CPU时间也随之增加。

表 5-1 边界元电感提取中常用积分类型小结

	$U(\cdot)$	$\nabla(\cdot)$	$\nabla\nabla(\cdot)$	描述
$1/r$	$\frac{1}{r}$	$\nabla(\frac{1}{r})$	$\nabla\nabla(\frac{1}{r})$	Laplace 基本解相关
$e^{ikr}/r$	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\nabla(\frac{e^{ikr}}{r})$	$\nabla\nabla(\frac{e^{ikr}}{r})$	Helmholtz 基本解相关
奇异性	弱奇异、跨越边界连续	强奇异 (CPV)、跨越边界不连续 (光滑边界 1/2 跳跃)	超强奇异 (Hadamard Principal Value, H.P.V.)、跨越边界伪连续 (pseudo continuous)	

表 5-2 和表 5-3 分别列出了FastImp、FastImp “新公式”<sup>[30]</sup>和混合法中需计算的各种积分类型。其中，混合法在处理Helmholtz相关积分时，由FastImp中的低阶积分  $U(\cdot)$  和  $\nabla(\cdot)$  转换到高阶的  $\nabla(\cdot)$  和  $\nabla\nabla(\cdot)$  积分，因此，可推断混合法需更多的时间来处理数值积分。此外，从表 5-3 可看到，FastImp “新公式”和混合法需处理的积分类型是相同的。

需注意的是，在 EMQS 和全波分析中，所有方法的 Laplace 基本解相关积分变为 Helmholtz 相关积分，只是介质中波数  $k$  与导体内波数  $k$  不同。

表 5-2 FastImp 中积分类型小结

	$U(\cdot)$	$\nabla(\cdot)$	$\nabla\nabla(\cdot)$
$1/r$	√	√	
$e^{ikr}/r$	√	√	

表 5-3 混合法和 FastImp “新公式” 中积分类型小结

	$U(\cdot)$	$\nabla(\cdot)$	$\nabla\nabla(\cdot)$
$1/r$	√	√	
$e^{ikr}/r$		√	√

### 5.2.2 超奇异积分计算

在计算系数矩阵  $D_2(a, b)$  时, 由于:

$$\begin{aligned}
 D_2(a, b) &= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y}_a)} \left[ \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[ \frac{e^{-ikr(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})} \right] d\mathbf{x} \right] \\
 &= -\hat{n}(\mathbf{y}_a) \cdot \int_S \left[ \nabla\nabla \left( \frac{e^{-ikr(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})} \right) \cdot \hat{n}'(\mathbf{x}) \right] ds'
 \end{aligned} \quad (5-8)$$

由上分析可知, 若  $a = b$  时, 将涉及到超奇异积分。采用普通二维偶数 Gauss 点的 Gauss 型积分公式是难以准确计算该超奇异积分的, 本章采用文献 [70] 中提出的积分方法来计算该超奇异积分, 具体令:

$$I_i = \int_S V_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ds' = \int_S \left[ \nabla\nabla \left( \frac{e^{-ikr(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})} \right) \cdot \hat{n}'(\mathbf{x}) \right] ds' \quad (5-9)$$

其中,  $S$  为积分面, 而点  $\mathbf{y}$  位于面  $S$  内。

在点  $\mathbf{y}$  附近作一个非常小的邻域  $S_\varepsilon$ , 最常用的是以点  $\mathbf{y}$  为圆心, 作一个半径为  $\varepsilon$  的小圆, 将奇异点  $\mathbf{y}$  从积分面  $S$  内挖去。于是上式(5-9)可以变为:

$$\begin{aligned}
 I_i &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{S-S_\varepsilon} V_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x + \int_{S_\varepsilon} V_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{S-S_\varepsilon} V_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x + \frac{b_i(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right\} \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left\{ F(\rho, \theta) - \left[ \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right] \right\} d\rho d\theta \\
 &+ \int_0^{2\pi} \left\{ F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - F_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] \right\} d\theta
 \end{aligned} \quad (5-10)$$

其中, 式(5-10)中利用了文 [70] 中已有的结论:

$$\int_{S_\varepsilon} V_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{b_i(\mathbf{y})}{\varepsilon} \quad (5-11)$$

在式 (5-10) 中, 函数  $F(\rho, \theta)$ 、 $F_{-2}(\theta)$ 、 $F_{-1}(\theta)$  可由被积函数的表达式, 即

$\nabla\nabla\left(\frac{e^{-ikr(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}}{4\pi r(\mathbf{y}_a, \mathbf{x})}\right)$  导出其解析形式, 而  $\hat{\rho}(\theta)$ 、 $\beta(\theta)$ 、 $\gamma(\theta)$  仅取决于积分区域的形状。由式(5-10)中最后一个等式可看到, 超奇异积分  $I_i$  最后可被转化为一个普通面积分和一个普通线积分之和。此结论及其转换方法是文献 [70] 中最重要的结论。值得注意的是, 该结论是准确的、没有引入任何近似。而且, 超奇异积分中的自由项  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{b_i(\mathbf{y})}{\varepsilon}$  最终被精确地消去, 这一点不同于强奇异积分, 它们往往存在 1/2 之类的自由项 (free term)。

### 5.3 数值结果

我们采用C/C++语言实现了本章提出的混合边界元模型。为了公平地进行速度比较, 同时也实现了FastImp所采用的直接边界元模型 (不含pFFT加速算法) [22], 它们分别被记作MBEM (Mixed BEM) 和DBEM (Direct BEM)。在两种边界元方法中, 均采用Matlab的求解引擎 (“\” 算符) 求解线性方程组  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 。在试验中, 提取两个互连结构的频变阻抗, 频率范围从  $10^4\text{Hz}$  到  $10^{11}\text{Hz}$ 。导体表面离散为矩形面元, 采用常数元和点配置法, 配置点位于面元中心。数值积分采用二维Gauss积分公式, 为保证积分精度, 特别是近奇异积分的计算精度, 高斯点个数取为  $20 \times 20$ 。而强奇异和超奇异积分则采用特殊的奇异积分处理方法 [70][69]。当频率  $f \geq 10\text{GHz}$  时, 后处理中计算导体电流的方法切换到高频电流计算模式 [22]。

#### 5.3.1 单直导体

此算例用于验证混合法能否正确提取高频趋肤效应下导体电感。

单直导体的几何尺寸为  $1\mu\text{m} \times 1\mu\text{m} \times 8\mu\text{m}$ , 导体表面离散为  $3 \times 3 \times 12$  个面元, 如图 5-3 所示。为进行精度比较, 引入电感提取软件 FastHenry 的结果, 并采用了不同的离散, 如: FH512 指 FastHenry 将导体离散为 512 根电流细丝得到的结果, 其它类推。

图 5-4 和图 5-5 分别绘出了三种方法下频变电阻和频变电感曲线。从图中可看到, 在整个频率范围内, DBEM 和 MBEM 的电阻和电感结果符合得很好, 并且, 它们的结果与 FastHenry 结果的最大相对误差也小于 1.2% (100GHz 时)。考虑到, 在频率  $f=100\text{GHz}$  时, 导体内趋肤深度仅为  $\delta = 0.2\mu\text{m}$ , 而导体横截面

尺寸为 $1\mu\text{m}\times 1\mu\text{m}$ 。由于在横截面方向，由导体表面深入到导体中心，电场强度呈指数规律衰减，所以此时，导体中心电场强度约为导体表面电场强度的 8%。由此可见，导体内已出现明显的电流非均匀分布现象。而此算例的结果表明，在导体内非均匀电流分布的情形下，混合法能正确地提取频变阻抗。

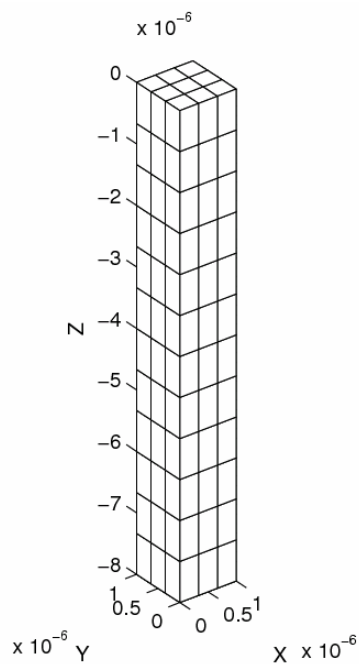


图 5-3 单直导体离散示意图



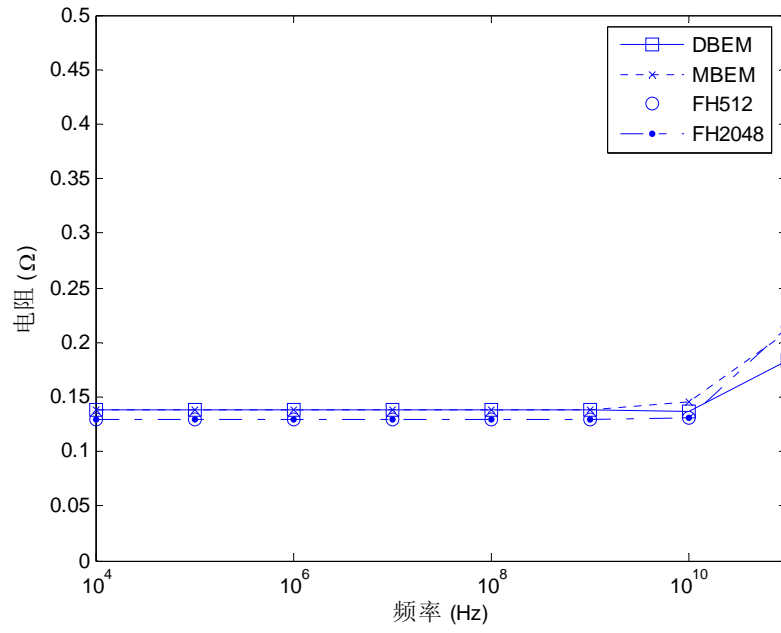


图 5-4 单直导体频变电阻曲线

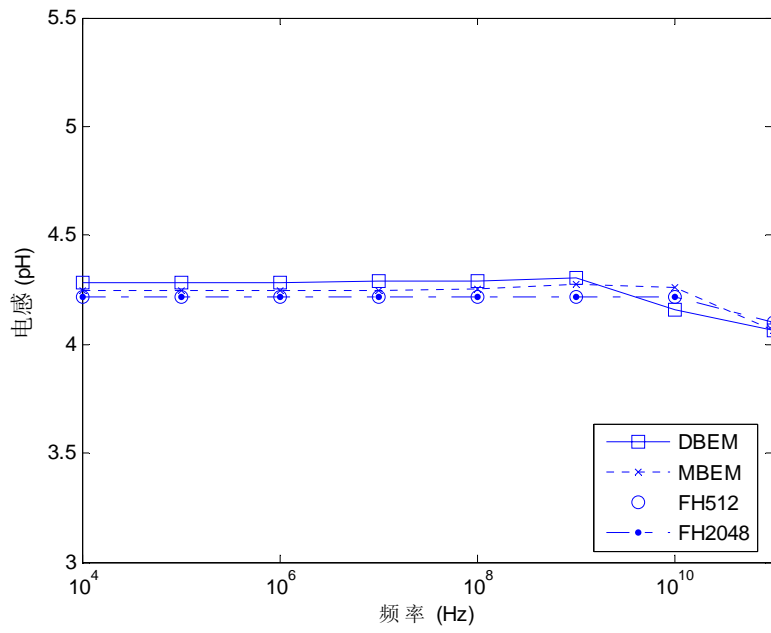


图 5-5 单直导体频变电感曲线

### 5.3.2 Bus2x2 交叉导体结构

此算例来自FastImp中名为“bus2x2”的算例<sup>[48]</sup>，它的尺寸及离散由图 5-6 示意。由于该结构有四根导体，所以电感（阻抗）的结果将为一  $4 \times 4$  的电感（阻抗）方阵。

为了验证混合法能否正确捕获导体之间的高频邻近效应，特取出两平行导体之间的频变电阻和频变电感，即阻抗矩阵中元素（1，2）的实部和虚部（虚部除以  $i\omega$ ），分别在图 5-7 和图 5-8 中画出。再次，从图中可见，MBEM和DBEM的电阻和电感结果在全频率范围内符合得非常好。它们的结果与FastHenry也符合得较好，但除了在最高频率下，即  $f=100\text{GHz}$  时，与FH1792 相比可观察到电感存在最大达约  $-15\%$  的相对误差，而电阻相对误差更大<sup>①</sup>。事实上，我们已进一步加密了FastHenry的离散达 7168 根电流细丝，但其结果依然收敛于 1792 个电流细丝的结果。为更好地分析问题产生的原因和客观比较，特引入了FastImp的结果，也一并绘在图 5-7 和图 5-8 中。从图中可见，FastImp的结果同MBEM及DBEM的结果符合得非常好。因此，较合理地推断是在此结构的高频互感中，FastHenry结果存在较大误差。而同时，MBEM方法能同FastImp一样，正确地捕获高频邻近效应。

---

① 理论上，FastHenry 互阻抗的实部为 0。所以，这里的差别来自 FastHenry 模型与边界元模型上的差别。而且，此时高频下，阻抗虚部实际比实部大 2-3 个数量级，因此，这里实部“更大的相对误差”其实对模拟与验证的影响并不大。

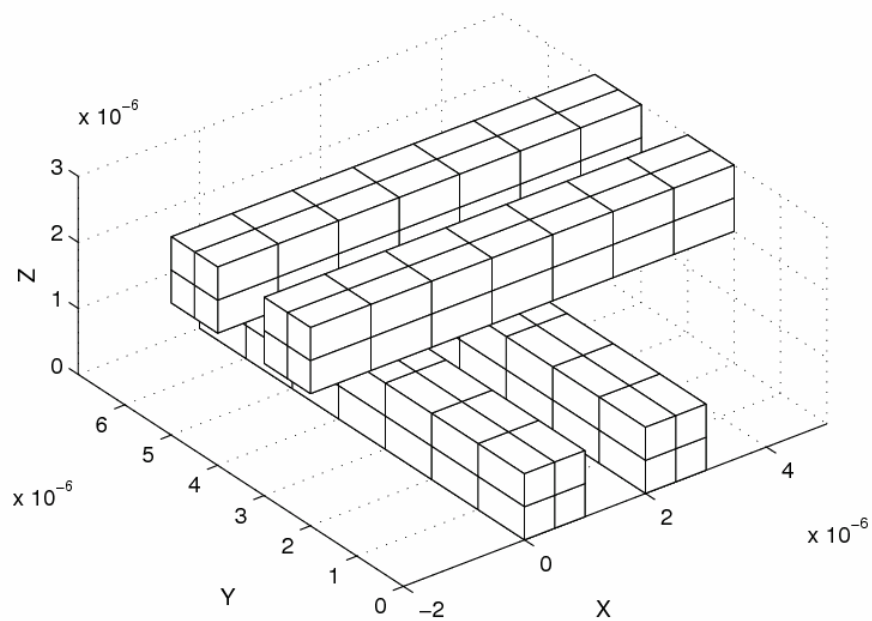


图 5-6 bus2x2 交叉导体结构

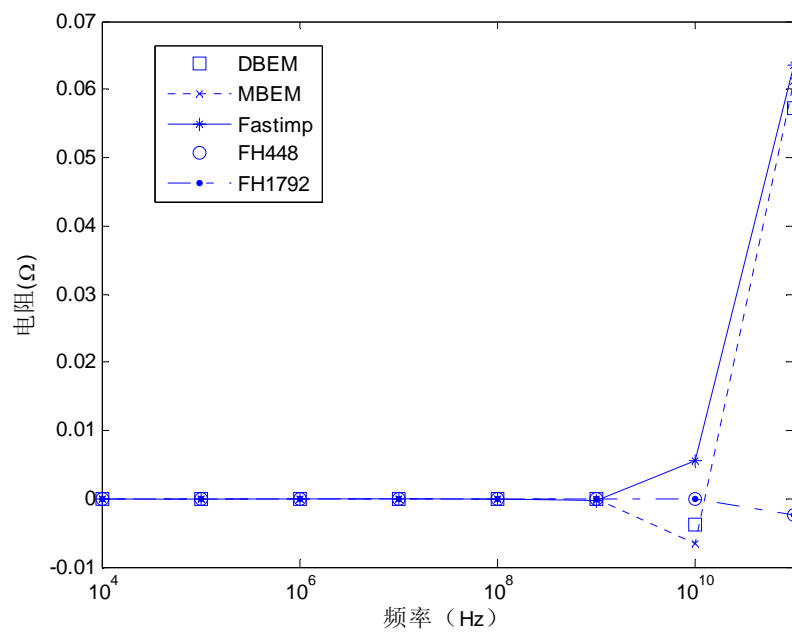


图 5-7 bus2x2 交叉导体结构中频变电阻曲线

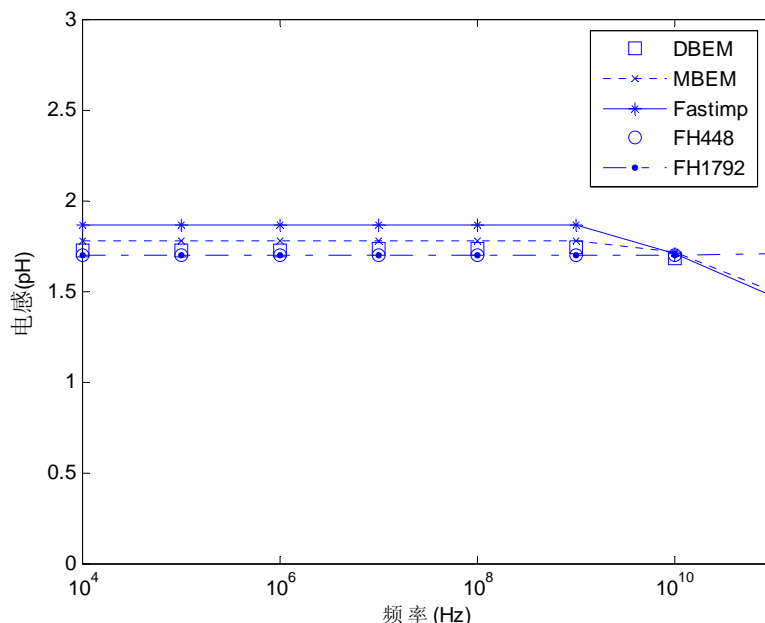


图 5-8 bus2x2 交叉导体结构中频变电感曲线

### 5.3.3 时间比较

在一个频率点上，两个算例的 CPU 时间比较结果在表 5-4 中列出。

表 5-4 两个算例的 CPU 时间分布明细表（秒）

	单直导体		Bus2x2 交叉导体	
	DBEM	MBEM	DEBM	MBEM
面元数目	162	162	256	256
未知数数目	1136	650	1800	1032
$P_0$ 和 $D_0$ 矩阵	1.859	2.359	4.500	4.953
$P_1$ , $D_1$ , $D_2$ 矩阵	12.328	22.782	7.547	12.484
生成 $Ax=b$	0.141	0.562	0.344	0.828
求解 $Ax=b$	2.828	0.546	47.063	8.515
后处理	0.000	0.000	0.000	0.063
总计	17.156	26.249	59.454	26.843

在单直导体算例中，与 DBEM 相比，由于 MBEM 能减少未知数，所以求解线性方程组时间能从 DBEM 的 2.828s 下降为 MBEM 的 0.546s。但混合法由于需处理更高阶的积分，导致在计算积分矩阵  $D_1$  和  $D_2$  的时间（22.782 秒）明显高于直接法中计算  $P_1$  和  $D_1$  的时间（12.328 秒），而在此算例中，积分时间占整个提

取时间的大部分，因此，在总提取时间上，MBEM（26.249 秒）却慢于 DBEM（17.156 秒）。

在此算例中，由于两种方法中未知数差别并不显著（DBEM 为 1136、MBEM 为 650），且它们绝对值都很小，使得求解该线性方程组均非常迅速。相反在积分部分，由于在原型中，为了简单地处理近奇异积分，每个积分面元上选取了 400 个高斯点，这种“笨拙”的数值积分占据了太多 CPU 时间，因此，混合边界元方法能减少变量数，加速求解线性方程组的优势并没有体现出来。

但在 Bus2x2 算例中，混合法的的速度优势显示出来。在此算例中，尽管两种边界元方法未知数仍不是很大，分别为 1032 和 1800，但它们在求解  $Ax=b$  上的速度差别却比较明显，分别是 MBEM 的 11.8s（47.063s/4）和 DBEM 的 2.1s（8.515s/4）。

更为重要的是，因为有四个导体，为得到完整的电感矩阵，该线性方程组需用不同的右端项求解四次。这使得 MBEM 未知数少的优势变得更加突出。特别地，对于实际中含有大量导体的应用，意义尤为显著。

将来，该算法原型将被实现到 FastImp 中，所有数值积分将归化为 FastImp 已采用的更为快速的一维数值积分，积分中 Gauss 点总数也将减到几十个，这将大幅提高数值积分速度。而且，由于文 [30] 对 FastImp 的公式已作改进，提出一种“新公式”（new formulae），它能有效降低系数矩阵的条件数，而在该新公式中，数值积分也从  $P_1$  和  $D_1$  转换到更高阶的  $D_1$  和  $D_2$ 。因此，本文提出的混合方法若同 FastImp 新公式相比，则可在不增加任何额外积分代价的情况下，获得减少约一半变量数的优势。

## 5.4 本章小结

本章提出了一种提取三维互连结构频变电感的混合边界元模型。考虑到，在直角坐标系下，导体内所满足的矢量 Helmholtz 方程可分解为三个独立标量 Helmholtz 方程。针对每一个标量 Helmholtz 方程，可通过在导体表面引入虚拟的偶极子分布，将导体内电场以间接边界积分方程形式表达为这些偶极子产生的双层位势。而在所有导体之间（介质中），仍采用已在 FastImp 中应用的直接边界积分方程描述电场。混合使用间接和直接两类不同性质的边界积分方程，就得到一种新的所谓混合边界元电感提取模型。

混合边界元模型的主要优点是它能将总未知数目从直接法的  $7P$  降为  $4P$ ，因

此，将具有加速线性方程组求解的潜在优势。

## 第6章 总结与展望

### 6.1 总结

随着 VLSI 电路工作频率提高以及微波/射频和数模混合集成电路的使用, 频变电感(阻抗)在精确的电路模拟和验证中起着越来越重要的作用, 精确地提取它们已成为参数提取的重要课题。

边界元法电感提取原型 **FastImp** 与基于 PEEC 体积元模型的多种方法(如: **FastHenry**) 相比有其独特优势。本文研究工作均是基于边界元方法。

**FastImp** 目前作为业内领先、快速、能适应宽频率范围的电感提取原型, 仍存在两个重要缺陷。首先, 尽管采用了 pFFT 加速, 使其提取单个频率点阻抗时非常高效, 但在提取多个频率点阻抗时显得较“笨拙”, 因为它基本相当于在每一频率点上逐点反复运行程序, 而未作有效优化。其次, 由于 **FastImp** 采用直接边界元模型, 其变量数达到  $7-8P$ , 使得即使对中等规模问题, 方程组规模也会急剧膨胀, 难以求解。本文工作将集中在分别解决这两个问题。

对多频率点电感提取, 本文完成了两步工作。第一步, 将已应用于特征值计算的多重互反边界元方法(CMRM)引入到多频率点电感提取中。但由于 VLSI 电路苛刻的数值特性, 使得 CMRM 级数公式属于病态级数这一问题显露出来, 而该问题在特征值计算中未曾遇到。本文提出了包括距离归一化、窗口技术等一组方法, 有效克服了该数值困难, 数值结果显示该方法在多频率点提取上具有的潜在优势。

第二步, 为了在速度上超过 **FastImp**, 并克服极高频率下结果不精确等问题, 本文进一步将上述 CMRM 电感提取原型与 pFFT 加速算法结合, 实现了两种不同组合方式: 精确组合方式和近似(快速)组合方式, 并将其集成到原始的 **FastImp v1.0** 中, 最终实现为一个简单可用原型(与原始 **FastImp** 相比, 仅需修改一个调用参数就可切换到新方法上)。数值结果显示, 对多频率点电感提取, 两种组合方式在保证相当高精度的同时, 速度上明显优于 **FastImp**。此外, 该组合方式实际上是将仅能加速远场且与频率相关的 pFFT 算法, 改造为一个能同时加速近场和远场且基本与频率无关的更强的快速算法。这种组合方式, 除可解决电感提取这一特定应用外, 对提出 MRM 和 CMRM 方法的特征值计算问题, 或已经采

用原始 pFFT 加速的其它工程应用，均具有借鉴意义。

在边界元模型问题上，本文提出了一种混合边界元电感提取模型。这里混合的含义是指：在每一导体区域，将电场表达为仅在导体表面分布的虚拟偶极子产生的双层位势，这属于一种间接边界积分方程，而在所有导体之间（介质区域），则仍采用 FastImp 中已采用的直接边界积分方程，组合这两种不同类型的边界积分方程，得到最终的积分方程组。虽仅为一种混合方法，但同间接法一样，能将每个边界元上变量数从直接法中的 7 个降为 4 个（MQS 假设下），从而减少方程组规模。数值试验验证了该模型的正确性，并显示出潜在速度优势。

## 6.2 下一步工作展望

多重互反方法是一种新的边界元方法，它的主要特点是能将积分方程中体积分消除，代之以 Laplace 方程高阶基本解。更为重要的是，MRM 公式表明，仅利用 Helmholtz 方程基本解的实部就可完整表达整个微分场。当 MRM 扩展为 CMRM 后，CMRM 完全等价于 Helmholtz 方程基本解。从数学上看，CMRM 公式就“退化”为 Helmholtz 方程基本解的 Taylor 展开，尽管对于多频率点电感提取，CMRM 方法依然同 MRM 方法一样具有积分与频率无关的优点，并且，完全等价 Helmholtz 方程基本解的特性也简化了问题，避免了类似特征值计算中伪特征值问题可能导致的其它潜在难题，但 CMRM 公式基本丧失原始 MRM 公式更为深刻的物理内涵，并需多一倍的内存空间（MRM 公式仅需保存实部）。因此，能否将 MRM 公式应用于多频率点电感提取，是一个值得探索的课题。但是，同样不利的是，目前仅有对  $k$  和  $r$  较小情形时的试验数据（均来自特征值计算），而更严重的是，MRM 公式将导致线性方程组中出现非主对角线占优，且该问题来自 MRM 模型本身；当然，还可能出现类似伪特征值问题的其它情况，因此，实现有难度。

混合法模型目前尚处原型阶段，已验证其模型正确性和潜在速度优势。但进一步工作，需将其实现为用预条件 GMRES 求解方程组，用更大规模的数值试验观察该方法的稳定和可靠性，并可得到该方法加速求解  $Ax=b$  的实际效果。主要技术困难可能在于如何精心设计 GMRES 的预条件方法。若上一步效果较好，可考虑与 pFFT 方法结合，实现出一个在单频率点问题上超过 FastImp 的新原型系统。

由于多频率点问题加速的是积分部分（快速形成线性方程组），而混合法加



速的是求解  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  部分，因此，将两者结合在一起原则上是可行的。特别地，在组合 CMRM 和 pFFT 原型中，时间分布已由原始 FastImp 中积分占主导转移到求解  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  占主导，因此，再并入混合法模型以加速  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  的求解应能取得较好效果。但可能的技术困难在于混合方法中高阶积分 ( $\int \nabla \nabla (e^{ikr} / r) ds$ ) 的数值积分计算及其迭代计算公式。

能适应三维复杂结构、可靠的间接法电感提取模型，目前尚属空白，能否在此问题上有所突破仍属较大、较困难的理论问题。但如我们在电容问题上已有的经验一样，间接法虽能减少变量数，但也会导致完全稠密矩阵，而直接法是更为优良的分块稠密矩阵，在各自采用不同加速技术后，它们之间的速度差别可能并不如未知数上的差别那样大。

## 参考文献

- [1] Kahng A B, Muddu S. Analytical delay model for RLC interconnects. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 1997, 16:1507~1514
- [2] Ismail Y I, Friedman E G. Effects of inductance on the propagation delay and repeater insertion in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*. 2000, 8:195~206
- [3] Ruehli A E. *Circuit Analysis, Simulation and Design, part 2*. Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1987. 211~332
- [4] Kamon M. *Fast Parasitic Extraction and Simulation of Three Dimensional Interconnect via Quasistatic Analysis: [Ph. D Thesis]*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Department of Electric Engineering and Compute Science, 1998.
- [5] Massoud Y, White J. Simulation and Modeling of the Effect of Substrate Conductivity on Coupling Inductance. In: *Proceedings of the International Electron Devices Meeting*. Washington D. C, 1995. 491~494
- [6] Davis J A, Meindl J D. Compact distributed RLC models for multilevel interconnect networks. In: *IEEE Symposium on VLSI Circuits, Digest of Technical Papers*, Kyoto Japan, 1999. 167~168
- [7] Wu R B, Yang J C. Boundary integral equation formulation of skin effect problems in multiconductor transmission lines. *IEEE Trans. on Magn.* 1989, 25:3013~3015
- [8] Tsuk M J, Kong J A. A hybrid method for the calculation of the resistance and inductance of transmission lines with arbitrary cross sections. *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* 1991, 39:1338~1347
- [9] Hoer C, Love C. Exact inductance equations for rectangular conductors with applications to more complicated geometries. *Journal of Research of the National Bureau of Standards – C. Engineering and Instrumentation*. 1965, 69C:127~137
- [10] Ruehli A E. Inductance calculations in a complex integrated circuit environment. *IBM J. Res. Develop.* 1972, 16:470~481
- [11] Grover F W. *Inductance Calculations: Working Formulas and Tables*. New York: D. Van Nostrand Company, Inc. 1947. 261~282
- [12] Synopsys Corp. *Raphael Reference Manual*. 2000.
- [13] Rosa E. The self and mutual inductance of linear conductors. *Bull. Nat. Bur. Standards*. 1908, 4:301~344

- [14] Ruehli A E. Equivalent circuit models for three-dimensional multiconductor systems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1974, 22:216~221
- [15] Cao Y, Li Z F, Mao J F, Mao J F. A PEEC with a new capacitance model for circuit simulation of interconnects and packaging structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology*. 2000, 48:281~287
- [16] 李征帆, 曹毅. 微波与高速电路中的电磁场理论及其数值方法. 北京: 科学出版社, 2002. 184~200
- [17] Kamon M, Tsuk M, Smithhisler C, White J. FastHenry: A Multipole-Accelerated 3-D Inductance Extraction Program. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*. 1994, 42:1750~1758.
- [18] Beattie M W, Pileggi L T. Electromagnetic parasitic extraction via a multipole method with hierarchical refinement. In: *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design, Digest of Technical Papers*. San Jose, CA, USA, 1999. 437~444
- [19] Restle P J, Ruehli A E, Walker S G, Papadopoulos G. Full-wave PEEC time-domain method for the modeling of on-chip interconnects. *IEEE Transaction On Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 2001, 20:877~887
- [20] Beattie M W, Pileggi L T. Inductance 101: Modeling and Extraction. In: *Proceedings - Design Automation Conference*. Las Vegas, Nevada, USA, 2001. 323~328
- [21] Gala K, Blaauw D, Wang J, Zolotov V, Zhao M. Inductance 101: Analysis and Design Issues. In: *Proceedings - Design Automation Conference*. Las Vegas, Nevada, USA, 2001. 329~334.
- [22] Wang J. A New Surface Integral Formulation of Emqs Impedance Extraction for 3-D Structures. [Ph. D Thesis]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technolgy, Department of Electric Engineering and Compute Science, 1999.
- [23] Kamon M, Wang F, White J. Recent Improvements to Fast Inductance Extraction and Simulation. In: *Proceedings of the 7th Topical Meeting on Electrical Performance of Electronic Packaging*. West Point, New York, 1998. 281~284
- [24] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. New York: MacMillan, 1968. 5~9
- [25] C.A.布莱比亚. 工程师用的边界单元法. 北京: 科学出版社, 1986. 125~158
- [26] 李忠元. 电磁场边界元素法. 北京: 北京工业学院出版社, 1987. 33~60
- [27] 倪光正, 钱秀英. 电磁场数值计算. 北京: 高等教育出版社, 1996. 333~356
- [28] Wang J, White J. A wide frequency range surface integral formulation for 3-D RLC extraction. In: *Proc Int Conf Computer Aided-Design*. 1999. 453~457

- [29] Zhu Z. Efficient techniques for wideband impedance extraction of complex 3-D geometries. [Master's Thesis], Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Department of Electric Engineering and Computer Science, 2002
- [30] Zhu Z, Huang J, Song B, White J. Improving the robustness of a surface integral formulation for wide-band impedance extraction of 3-D structures. In: Proc Int Conf Computer Aided-Design. 2001. 592~597
- [31] Zhu Z, Song B, White J. Algorithms in FastImp: a fast and wideband impedance extraction program for complicated 3-d geometries. In: Proceedings - Design Automation Conference. 2003. 712~717
- [32] Zhu Z, Song B, White J. Algorithms in FastImp: a fast and wide-band impedance extraction program for complicated 3-D geometries. IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2005, 24:981~998
- [33] Arnoldi W E. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem. Quart. Appl. Math. 1951, 9:17~29
- [34] 方蜀州, 王泽毅. 最少变量数边界元提取三维 VLSI 互连电感与电阻. 中国科学 E 辑. 2002, 33:186~192
- [35] Fang S, Wang Z, Hong X. A 3-D minimum-order boundary integral equation technique to extract frequency-dependent inductance and resistance in VLSI. In: Proc. of ASP-DAC. 2002. 305~310
- [36] Mayergoyz I D. Boundary integral equation of minimum order for the calculation of three-dimensional eddy current problems. IEEE Trans. on Magnetics. 1982, 18:536~539
- [37] Yuan J, Kost A. A three-component boundary element algorithm for three-dimensional eddy current calculation. IEEE Trans. on magnetics. 1994, 30:3028~3031
- [38] Homentcovski D. Minimum-order regular boundary integral equations for three-dimensional eddy-current problem. IEEE Trans. on Magnetics. 2002, 38:3433~3438
- [39] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. New York: McGraw-Hill, 1953. 1762~1767
- [40] Smythe W R. Static and dynamic electricity. New York: McGraw-Hill, 1968. 284~287
- [41] Hammond P. Use of potentials in calculation of electromagnetic fields. IEE Proceedings, Part A: Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews. 1982. 129:106~112
- [42] Kriezis E E, Xypteras I E. Eddy Current Distribution and loss in a semi-infinite Conducting Space Due to a Vertical Current Loop. ETZ Archiv. 1979, 201~207
- [43] Dahlquist G, Bjorck A. Numerical Methods (, translated by Anderson N). Englewood Cliffs, New Jersey:Prentice-Hall, Inc., 1974. 75~76
- [44] 宋文淼, 张晓娟, 徐诚. 电磁波基本方程组. 北京: 科学出版社, 2003. 93~95

- [45] 宋文森. 矢量偏微分算子. 北京: 科学出版社, 1999. 88~94.
- [46] 雷银照. 时谐电磁场解析方法. 北京: 科学出版社, 2000. 86~92.
- [47] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析. 北京: 科学出版社, 1991. 9~19
- [48] Zhu Z, Song B, White J. FastImp. [http://www.mit.edu/cpg/research\\_codes.htm](http://www.mit.edu/cpg/research_codes.htm).
- [49] 盛新庆. 计算电磁学要论. 北京: 科学出版社, 2004. 1~5
- [50] Tai Chen-to. Dyadic Green functions in electromagnetic theory. New York: IEEE Press, 1994. 6~11
- [51] Guru B S, Hiziroglu H R. Electromagnetic Field Theory Fundamentals (Second Edition). New York: Cambridge University Press, 1998. 536~539
- [52] Nardini D, Brebbia C A. A new approach to free vibration analysis using boundary element method. In: Proc 4th Int Conf Bound Elms. 1982. 313~326
- [53] Partridge P W, Brebbia C A. The dual reciprocity boundary element method for the Helmholtz equation. In: Proc Int Bound Elms Symp. 1990. 543~555
- [54] Ali A, Rajakumar C, Yunus S M. On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems. Int J Numer Meth Engng. 1992, 31:1271~1282
- [55] Nowak A J, Brebbia C A. Solving helmholtz equation by boundary elements using the multiple reciprocity method. Computers and Experiments in Fluid Flow. 1989, 265~270
- [56] Nowak A J, Brebbia C A. The multiple reciprocity method - a new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. Engng Anal Bound Elem. 1989, 6:164~167
- [57] Kamiya N, Andoh E, Nogae K. Three-dimensional eigenvalue analysis of the helmholtz equation by multiple reciprocity boundary element method. Adv Engng Software. 1993, 16: 203~207
- [58] Chen J T, Wong F C. Analytical derivations for one-dimensional eigenproblems using dual boundary element method and multiple reciprocity method. Engng Anal Bound Elem. 1997, 20:25~33
- [59] Wong F C. Analysis and experiment for acoustic modes of a cavity containing an incomplete partition: [Master Thesis]. Taiwan: National Taiwan Ocean University, 1997.
- [60] Kamiya N, Andoh E, Nogae K. A new complex-valued formulation and eigenvalue analysis of the helmholtz equation by boundary element method. Adv Engng Software. 1996, 26: 219~227
- [61] Yeh W, Chen J T, Chen K H, Wong F C. A study on the multiple reciprocity method and complex-valued formulation for the helmholtz equation. Adv Engng Software. 1998, 29: 1~6

- [62] Chang J R, Yeih W, Wu Y C, Chang J J. Applications of the complete multiple reciprocity method for solving the 1D Helmholtz equation of a semi-infinite domain. *Adv Engng Software*. 2001, 32:111~117
- [63] Kamiya N, Andoh E. Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method. *Journal of Sound and Vibration*. 1993, 160:279~287
- [64] 金朝嵩. 求解三维 Helmholtz 方程外边值问题的一种新的边界积分方程法. *重庆建筑工程学院学报*. 1995, 17:43~49
- [65] Forsythe G E, Malcolm M A, Moler C B. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1977. 14~16
- [66] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, Flannery B P. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing, Second Edition*. 北京: 电子工业出版社, 2003. 172~172
- [67] Yan C, Yu W, Wang Z. Calculating Frequency-Dependent Inductance of VLSI Interconnect by Complete Multiple Reciprocity Boundary Element Method. In: *Asia and South Pacific Design Automation Conference*. 2006. 844~849
- [68] Yan C, Yu W, Wang Z. Application of the Complete Multiple Reciprocity Method for 3D Impedance Extraction with Multiple Frequency Points. *Eng. Anal. with Bound. Elem.* (in print)
- [69] Guiggiani M, et al. A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Trans. ASME J Appl. Mech.* 1990, 57:906~915
- [70] Guiggiani M, et al. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Trans. ASME J Appl. Mech.* 1992, 59:604~614
- [71] 陈正宗. *边界元素法——理论与工程应用*. 台北市: 良宜图书有限公司, 1990. 3-1~3-30
- [72] Phillips J R, White J K. A precorrected-FFT method for electrostatic analysis of complicated 3D structures. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 1997, 16:1059~1072
- [73] Phillips J R. Rapid solution of potential integral equations in complicated 3-dimensional geometries. [Ph.D. thesis] Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Department of Electric Engineering and Compute Science, 1997
- [74] Athanasiadis G. Direct and indirect boundary element methods for solving the heat conduction problem. *Comput. meth. in appl. mech. & eng.* 1985, 49:37~54
- [75] Athanasiadis G. Numerical investigations of direct and indirect integral equations for solving the heat conduction problem. *Comput meth. in appl. mech. & eng.* 1985, 49:203~220
- [76] Changhao Yan, Wenjian Yu and Zeyi Wang. A Mixed Boundary Element Method for Extracting Frequency-Dependent Inductances of 3D Interconnects. In: *International Symposium on Quality Electronic Design*. San Jose, CA, USA, 2006. 709~716

## 致 谢

感谢王泽毅导师对我的精心指导，您的言传身教和严谨治学态度将使我终生受教诲。感谢喻文健老师的指导和论文写作上的巨大帮助，非常感谢。

感谢清华大学计算机系 EDA 实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持！特别地，与郭小波、王习仁、张梦生等同学的讨论非常有益。

感谢台湾海洋大学陈正宗教授等，FastImp 的作者 Zhu Zhenhai 等，在一些细节上的讨论，加快了 my 的课题进展。

本课题承蒙国家自然科学基金和 863 项目资助，特此致谢。

感谢我的父母！



## 声 明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：\_\_\_\_\_日 期：\_\_\_\_\_

## 个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历

1974年05月16日出生于湖北省武汉市。

1992年9月考入华中理工大学流体机械专业，1996年7月本科毕业并获得工学学士学位。

1999年9月考入华中理工大学计算机软件与理论专业，2002年7月获得工学硕士学位。

2002年9月考入清华大学计算机科学与技术系攻读博士学位至今。

### 发表的学术论文

[1] **Changhao Yan**, Wenjian Yu and Zeyi Wang. Calculating Frequency-Dependent Inductance of VLSI Interconnect by Complete Multiple Reciprocity Boundary Element Method. In: Asia and South Pacific Design Automation Conference. Yokohama, Japan, 2006. 844~849.

[2] **Changhao Yan**, Wenjian Yu and Zeyi Wang. Application of the Complete Multiple Reciprocity Method for 3D Impedance Extraction with Multiple Frequency Points. Eng. Anal. with Bound. Elem. (in print) (SCI, Elsevier, 影响因子 1.0)

[3] **Changhao Yan**, Wenjian Yu and Zeyi Wang. A Mixed Boundary Element Method for Extracting Frequency-Dependent Inductances of 3D Interconnects. In: International Symposium on Quality Electronic Design. San Jose, CA, USA, 2006. 709~716. (Best Paper Candidate) (EI 索引)