以複變函數求解一元三次方程式的根

Solving roots of cubic equation using complex variable

余尚儒

國立台灣海洋大學河海工程學系，基隆，台灣

E-mail: B935200191@mail.ntou.edu.tw

摘要

解一元三次方程式發展至今已四百多年之久，但迄今所探討的一元三次方程式仍為實係數，對於複係數仍欠缺一套完整的解法。故本專題是以複數的手法將一元三次方程式求解的問題，透過平移與複數伸縮的技巧，再利用正餘弦之三倍角公式，轉變成三角函數問題 $\cos(3\theta)=-\frac{R}{S^3}$，最後對其反函數來逆推其解。在判別式上，本專題利用複變的操作，探討出其三根實虛與係數的關係，進而推導出其對應的判別式，以供實根與虛根之判定，是有別於文獻的推導[7]。除此之外，因為正餘弦與雙曲正餘弦含有複數轉換關係，故亦可利用雙曲正餘弦之三倍角公式，以類似的方法求其解。並在文中提出三個算例，來檢驗本計劃判別式的可行性與正確性。除此之外，本計劃也可解出一元三次複數係數方程式的根，故再舉一個算例來驗證。最後，將以上四範例利用 Mathematica 符號運算軟體計算求其根與並畫出平移及複變伸縮之過程，便於判斷其根的正確性與圖形的變化。

關鍵字：一元三次方程式、三倍角正餘弦公式、複變函數

一、前言

隨著知識的成長，面對同樣的問題，通常有不同的想法與處理方式。國中時代，學了許多解一元二次方程式的方法，其中最常見的方法為公式解，但對於判別式中根號內小於 0 其根為無實數解的問題，便產生迷惑。故在高中時期，引入了複數的觀念，也使得一元二次方程式中的虛根得到解答；然而大學時期又遇到$\left|cos(\theta)\right|>1$這種無法用實數理解的問題，進而透過複變函數來解決此類問題。

在一元三次方程式求解，已經算是一個數學發展史中的老問題。自卡登（1501～1576）公式以來已有四百年的歷史，在數學傳播期刊的文獻中，亦有幾篇精彩的論述。楊對於為何必須消去 x^2 項以及為何需假設 $x=y+z$ 均有補充說明[8]。而李亦以三次多項式的函數圖形探討根的性質，並對判別式作出說明[9]。前年曾等更從解一元三次方程式談到如何利用尺規構畫正七邊形[10]。綜而觀之，一個看似相當基本的一元三次方程式求根問題，竟如此有趣且具有內涵。

同樣的問題，不一定只能侷限於某種方法，以一個扭轉(Torsion)的問題為例，因為橫斷面形狀不同的關係，透過複變函數的手法，便可將其 Neumann 型邊界條件改成 Dirichlet 型[11]。可知一個在實數領域不易求解的問題，在複數領域內通常可找到一個簡捷的方法處理。故在學過複變函數後，對於是否可以以此方法來求解一元三次方

程式的根，引起了極大的興趣。故所以本計畫將以複變函數解決這個老問題，並推廣到求解複數係數的一元三次方程式。除此之外，在判別式的地方，也希望利用複變函數的方式來推導判別式，並與[9]比較。

二、理論推導

若給定一個一元三次方程式：

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \qquad (1)$$

將（1）同除A可化簡成：

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

其中，a、b與c均為實數。

在以平移的概念將$x + \frac{a}{3} = \mathrm{X}$代入（2)，則可得：

$$\mathrm{X}^3 + \mathrm{QX} + \mathrm{R} = 0 \qquad (3)$$

此式型態與三角函數中的三倍角公式相似：

$$\cos^3(\theta) - \frac{3}{4}\cos(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) \qquad (4)$$

$$\sin^3(\theta) - \frac{3}{4}\sin(\theta) = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) \qquad (5)$$

故需將（3）式中的$\mathrm{X}^3 + \mathrm{QX}$假設成此型式，便可利用複變函數的觀念將此一元三次方程式代入正弦或餘弦的三倍角公式。然而Q未必

等於$-\frac{3}{4}$，為了實現此想法則需再利用複數伸縮的觀念將X=SY代入（3）式，而得：

$$S^3Y^3+QSY+R=0 \qquad (6)$$

即：

$$Y^3+\frac{Q}{S^2}Y=-\frac{R}{S^3} \qquad (7)$$

其中$S^2=-\frac{4}{3}Q$。

若Q<0，則S將變成實數。

若Q>0，則S將變成複數，透過此複數伸縮的操作，可將一元三次方程式轉變成複數問題，便可求解：

$$\cos(3\theta)=-\frac{4R}{S^3} \qquad (8)$$

$$\sin(3\theta)=\frac{4R}{S^3} \qquad (9)$$

其反函數分別為：

$$\cos^{-1}(z)=\frac{\pi}{2}+i\ln(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}) \qquad (10)$$

$$\sin^{-1}(z)=-i\ln(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}) \qquad (11)$$

故利用（10）與（11）式可推得θ的三個解，再利用$Y=\cos(\theta)$與$Y=\sin(\theta)$；X=SY以及$x=X-\frac{a}{3}$的關係逐一逆推，即可得此一元三次方程式的三根。

以上是將一元三次方程式透過伸縮平移與正餘弦三倍角公式來求解，若以複數函數之考量，亦可改用雙曲三角函數來求解。

首先利用雙曲正餘弦函數中的三倍角公式

$$\cosh^3(\theta)-\frac{3}{4}\cosh(\theta)=\frac{1}{4}\cosh(3\theta) \qquad (12)$$

$$\sinh^3(\theta)+\frac{3}{4}\sinh(\theta)=\frac{1}{4}\sinh(3\theta) \qquad (13)$$

（12）（13）相似於（7）式中的 $Y^3+\frac{Q}{S^2}Y=-\frac{R}{S^3}$，其中 $S^2=-\frac{4}{3}Q$ 或

$S^2=\frac{4}{3}Q$

便將一元三次方程式轉變成雙曲函數問題

$$\cosh(3\theta)=-\frac{4R}{S^3} \qquad (14)$$

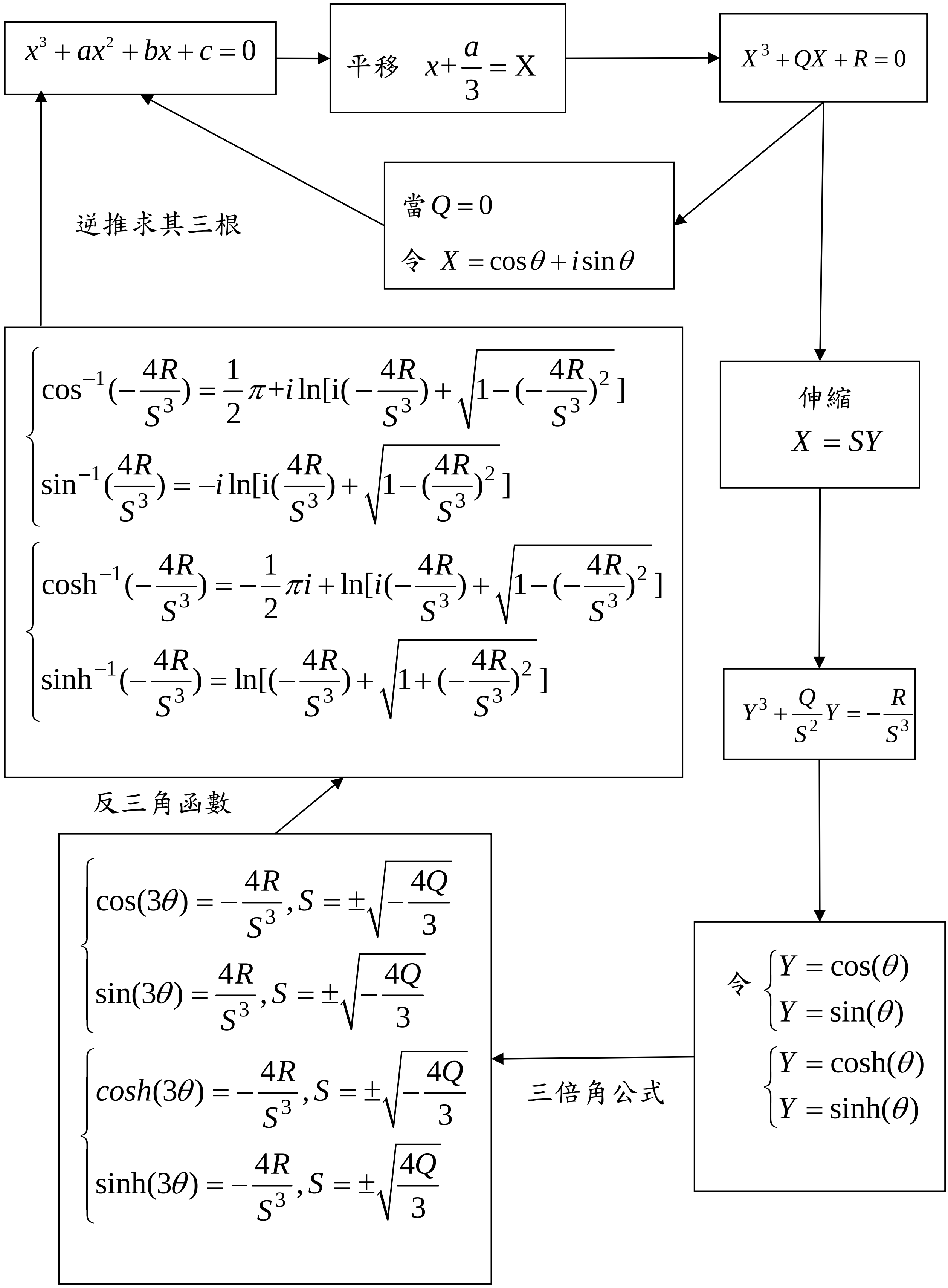
$$\sinh(3\theta)=-\frac{4R}{S^3} \qquad (15)$$

其反函數為

$$\cosh^{-1}(z)=-\frac{\pi}{2}i+\ln(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad (16)$$

$$\sinh^{-1}(z)=\ln(z+\sqrt{1+z^2}) \qquad (17)$$

故利用（16）與（17）式可推得 θ 的三個解，再利用 $Y=\cosh(\theta)$ 與 $Y=\sinh(\theta)$；$X=SY$ 以及 $x=X-\frac{a}{3}$ 的關係逐一逆推，即可得此一元三次方程式的三根。



解一元三次方程式流程圖

三、一元三次實係數方程式判別式

若給定一個三次方程式必定可透過平移將 $f(x)$ 轉成 X^3+QX+R，我們以 $\cos(\theta)$ 為例進行推導，從由流程圖可知：

$$X = S\cos(\theta) \tag{18}$$

可知：

$$\cos(3\theta) = -\frac{4R}{S^3}\text{，其中 } S = \pm\sqrt{-\frac{4Q}{3}} \tag{19}$$

$$3\theta = \frac{1}{2}\pi + \ln[\mathrm{i}(-\frac{4R}{S^3}) + \sqrt{1-(-\frac{4R}{S^3})^2}\,]i \tag{20}$$

由於 S 的關係，將其分成兩部份來討論 $Q<0$ 及 $Q>0$

(1)當 $Q<0$ 時，S 與 $\cos(3\theta)$ 均為實數。

假設 $-\frac{4R}{S^3}=c_1$ 並代入(19）與(20）式，其中 c_1 屬於實數，可知：

$$\cos(3\theta) = c_1 \tag{21}$$

$$3\theta = \frac{1}{2}\pi + \ln[\mathrm{i}c_1 + \sqrt{1-c_1^{\,2}}\,]i \tag{22}$$

為了判別 3θ 為實數或複數，故將 c_1 分成三部份來討論，$c_1^{\,2}>1$、$c_1^{\,2}=1$ 以及 $c_1^{\,2}<1$，可知：

$$c_1^{\,2} = \left|-\frac{4R}{S^3}\right|^2 = \left|-\frac{4R}{(\pm\sqrt{-\frac{4Q}{3}})^3}\right|^2 = -\frac{27R^2}{4Q^3} \tag{23}$$

(Ⅰ)當 $c_1^2 > 1$，可將 3θ 展開為：

$$\begin{aligned}3\theta &= \frac{1}{2}\pi + \ln[ic_1 + \sqrt{1-c_1^2}]i \\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln[i(c_1 + \sqrt{c_1^2-1})]i \\ &= \frac{1}{2}\pi + [\ln(c_1 + \sqrt{c_1^2-1}) + \ln(e^{\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi})]i \\ &= \mp 2n\pi + \ln(c_1 + \sqrt{c_1^2-1})i \end{aligned} \tag{24}$$

式(24)中取正的來看，可得：

$$\theta = \frac{2}{3}n\pi + \frac{1}{3}\ln[c_1 + \sqrt{c_1^2-1}]i \tag{25}$$

便可利用 $X = S\cos(\theta)$，逆推求根：

$$X = S[\cos(\frac{2}{3}n\pi)\cosh c_2 + \sin(\frac{2}{3}n\pi)\sinh c_2 i] \tag{26}$$

其中 $c_2 = \frac{1}{3}\ln[\mathrm{i}c_1 + \sqrt{c_1^2-1}]$

當 $n = 0$ 時，X 必為實根。

當 $n = 1,2$ 時，X 必為共軛複數根。

可知當 $c_1^2 > 1$ 時，X 必為一實根與兩共軛複數根。

(Ⅱ)當 $c_1^2 = 1$，可將 3θ 展開為：

$$\begin{aligned}3\theta &= \frac{1}{2}\pi + i\ln[i] \\ &= \frac{1}{2}\pi + i\ln[e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}] \\ &= \mp 2n\pi \end{aligned} \tag{27}$$

式(27)中取正的來看，可得：

$$\theta = \frac{2}{3}n\pi \tag{28}$$

便可利用 $X = S\cos(\theta)$，逆推求根：

$$X = S\cos(\frac{2}{3}n\pi) \tag{29}$$

當 $n = 1, 2$ 時，X 必為二重實根。

可知當 $c_1^2 = 1$ 時，X 必為二重實根與一相異實根。

（Ⅲ）當 $0 \le c_1^2 < 1$，可將 3θ 展開為：

$$\begin{aligned} 3\theta &= \frac{1}{2}\pi + \ln[ic_1 + \sqrt{1 - c_1^2}]i \\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln[i\sin(\alpha) + \cos(\alpha)]i \\ &= \mp\frac{3n\pi}{2} - \alpha \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\tan^{-1}(\alpha) = \dfrac{c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}}$

式(30) 中取正的來看，可得：

$$\theta = \frac{n\pi}{2} - \alpha \tag{31}$$

便可利用 $X = S\cos(\theta)$，逆推求根：

$$X = S\cos(\frac{n\pi}{2} - \alpha) \tag{32}$$

可知當 $0 \le c_1^2 < 1$ 時，X 必為三相異實根。

(2)當 $Q > 0$ 時，S 與 $\cos(3\theta)$ 均為純虛數。

假設 $-\dfrac{4R}{S^3} = c_3 i$ 其中 c_3 屬於實數，可得：

$$\cos(3\theta)=c_3 i \tag{33}$$

$$3\theta=\frac{1}{2}\pi+\ln[-c_3+\sqrt{1+c_3{}^2}]i \tag{34}$$

可將3θ展開為：

$$\theta=\frac{5}{6}n\pi+\frac{1}{3}\ln[-c_3+\sqrt{1+c_3{}^2}]i \tag{35}$$

便可利用 $X=S\cos(\theta)$，逆推求根：

$$\begin{aligned} X &= S\cos(\frac{5}{6}n\pi+c_4 i) \\ &= S[\cos(\frac{5}{6}n\pi)\cosh c_4+\sin(\frac{5}{6}n\pi)\sinh c_4 i] \end{aligned} \tag{36}$$

其中 $c_4=\frac{1}{3}\ln[-c_3+\sqrt{1+c_3{}^2}]$

當n ＝ 0,1時，X 必為共軛複數根。

當n ＝ 2時，X 必為實根。

可知當$Q>0$時，X 必為一實根與兩共軛複數根。

表 1. 判別式比較表

	本計劃		文獻[9]
判別式	$D=-\frac{27R^2}{4Q^3}$		$D_L=-4Q^3-27R^2$
三相異實根	$Q<0$	$0\le D\le 1$	$D_L>0$
兩重實根一相異實根	$Q<0$	$D=1$	$D_L=0$
三重實根	$Q=0$ 且 $R=0$	$D=\frac{0}{0}$	
一實根及兩共軛虛根	$Q\le 0$	$D>1$	$D_L<0$
	$Q\ge 0$	$D<0$	

將上式判別式結果整理並與判別式[9]做比較如表 1，其中可發現兩判別式的關係為 $D=\frac{D_L}{4Q^3}+1$，若將左式取倒數後整理後，便與[9]相同。

三、範例說明

範例一、$x^3+1=0$：

令 $x=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

則原式可轉化為：

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=-1 \tag{37}$$

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=\cos(\pi)+i\sin(\pi) \tag{38}$$

可得：

$$3\theta=(1+2n)\pi, n=0,1,2,... \tag{39}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}\text{、}\pi\text{、}\frac{5}{3}\pi \tag{40}$$

則：

$$x_1=\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{40}$$

$$x_2=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1 \tag{41}$$

$$x_3=\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{42}$$

範例二、 $x^3-6x^2+11x-6=0$

首先令 $x=X-\frac{a}{3}=X+2$ 代入上式

$$(X+2)^3-6(X+2)^2+11(X+2)-6=0 \tag{43}$$

化簡後得：

$$X^3-X=0 \tag{44}$$

令 $X=\mathrm{S}Y$，可得知：

$$Y^3-\frac{1}{\mathrm{S}^2}Y=0 \tag{45}$$

假設 $\frac{-1}{\mathrm{S}^2}=\frac{-3}{4}$，則 $\mathrm{S}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，可將上式轉化成 $Y^3-\frac{3}{4}Y=0$

(Ⅰ)令 $Y=\cos(\theta)$，則原式變為：

$$\cos(3\theta)=0 \tag{46}$$

可得知：

$$3\theta=(\frac{1}{2}+2n)\pi,\ n=0,1,2,... \tag{47}$$

$$Y_1=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},\ Y_2=\cos(\frac{5\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ Y_3=\cos(\frac{9\pi}{6})=0 \tag{48}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=1,\ X_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=-1,\ X_3=0\frac{2}{\sqrt{3}}=0 \tag{49}$$

利用平移 $x=\mathrm{X}-\frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1=1+2=3,\ x_2=-1+2=1,\ x_3=0+2=2 \tag{50}$$

(Ⅱ)若改令$Y=\sin(\theta)$，則原式變為：

$$\sin(3\theta)=0 \tag{51}$$

則：

$$3\theta=2n\pi, n=0,1,2,... \tag{52}$$

同理依序可得知：

$$Y_1=\sin(0)=0, Y_2=\sin(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}, Y_3=\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{53}$$

$$X_1=0\frac{2}{\sqrt{3}}=0, X_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=1, X_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=-1 \tag{54}$$

$$x_1=0+2=2, x_2=1+2=3, x_3=-1+2=1 \tag{55}$$

(Ⅲ)若改令$Y=\cosh(\theta)$，則原式變為：

$$\cosh(3\theta)=0 \tag{56}$$

則：

$$3\theta=(\frac{1}{2}+2n)\pi i, n=0,1,2,... \tag{57}$$

同理依序可得知：

$$Y_1=\cosh(\frac{\pi}{6}i)=\frac{\sqrt{3}}{2}, Y_2=\cosh(\frac{5\pi}{6}i)=-\frac{\sqrt{3}}{2}, Y_3=\cosh(\frac{9\pi}{6}i)=0 \tag{58}$$

$$X_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=1, X_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=-1, X_3=0\frac{2}{\sqrt{3}}=0 \tag{59}$$

$$x_1=1+2=3, x_2=-1+2=1, x_3=0+2=2 \tag{60}$$

(Ⅳ)若改令$Y=\sinh(\theta)$

即$\frac{-1}{\mathrm{S}^2}=\frac{3}{4}$,，$\mathrm{S}=\frac{2}{\sqrt{3}}i$，可將上式轉化成$Y^3+\frac{3}{4}Y=0$

原式變為：

$$\sinh(3\theta)=0 \tag{61}$$

則：

$$3\theta=2n\pi i, n=0,1,2,... \tag{62}$$

同理依序可得知：

$$Y_1=\sinh(0)=0, Y_2=\sinh(\frac{2\pi i}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}i, Y_3=\sinh(\frac{4\pi i}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{63}$$

$$X_1=0\frac{2}{\sqrt{3}}=0, X_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=1, X_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=-1 \tag{64}$$

$$x_1=0+2=2, x_2=1+2=3, x_3=-1+2=1 \tag{65}$$

上述的例題，以四種方式均得到相同的結果。

範例三、 $x^3+2x^2+2x+1=0$ ：

首先令 $x=X-\frac{a}{3}=X-\frac{2}{3}$ 代入上式

$$(X-\frac{2}{3})^3-6(X-\frac{2}{3})^2+11(X-\frac{2}{3})-6=0 \tag{66}$$

化簡後得：

$$X^3+\frac{2}{3}X+\frac{7}{27}=0 \tag{67}$$

令 $X=\mathrm{S}Y$ ，可得：

$$Y^3+\frac{2}{3\mathrm{S}^2}Y=-\frac{7}{27\mathrm{S}^3} \tag{68}$$

假設 $\frac{2}{3\mathrm{S}^2}=\frac{-3}{4}$ ，則 $\mathrm{S}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i$ ，可將上式轉化成 $Y^3-\frac{3}{4}Y=\pm\frac{7\sqrt{2}}{32}i$

(Ⅰ)令 $Y=\cos(\theta)$ ，則原式變為：

$$\cos(3\theta)=\pm\frac{7\sqrt{2}}{8}i \tag{69}$$

則：

$$3\theta=\frac{\pi}{2}+i\ln(\frac{\mp7\sqrt{2}+\sqrt{64\pm98}}{8}) \tag{70}$$

$$\theta=\frac{1+4n}{6}\pi+\frac{1}{2}i\ln2, n=0,1,2,... \tag{71}$$

可知：

$$Y_1=\cos(\frac{\pi}{6}+i\ln\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{72}$$

$$Y_2=\cos(\frac{5\pi}{6}+i\ln\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{73}$$

$$Y_3 = \cos(\frac{9\pi}{6} + i\ln\sqrt{2}) = \frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{74}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1 = (\frac{3\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i = \frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) \tag{75}$$

$$X_2 = (-\frac{3\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i = \frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) \tag{76}$$

$$X_3 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}i = -\frac{1}{3} \tag{77}$$

利用平移 $x = \mathrm{X} - \frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1 = \frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{78}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{79}$$

$$X_3 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}i = -\frac{1}{3} \tag{80}$$

(Ⅱ)若改令 $Y = \sin(\theta)$ ，則原式變為：

$$\sin(3\theta) = \mp\frac{7\sqrt{2}}{8}i \tag{81}$$

則：

$$3\theta = i\ln(\frac{\pm 7\sqrt{2} + \sqrt{64 \mp 98}}{8} \tag{82}$$

$$\theta = \frac{2n}{6}\pi + i\ln\sqrt{2}, n = 0,1,2,... \tag{83}$$

可知：

$$Y_1=\sin(0+i\ln\sqrt{2})=\frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{84}$$

$$Y_2=\sin(\frac{\pi}{3}+i\ln\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{85}$$

$$Y_3=\sin(\frac{2\pi}{3}+i\ln\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{86}$$

利用複數伸縮X=SY可得知：

$$X_1=\frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}i=-\frac{1}{3} \tag{87}$$

$$X_2=(\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i=\frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) \tag{88}$$

$$X_3=(-\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i=\frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) \tag{89}$$

利用平移$x=\mathrm{X}-\frac{a}{3}$可得知：

$$x_1=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-1 \tag{90}$$

$$x_2=\frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{91}$$

$$x_3=\frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{92}$$

(Ⅲ)若改令$Y=\cosh(\theta)$，則原式變為：

$$\cos(3\theta)=\pm\frac{7\sqrt{2}}{8}i \tag{93}$$

則：

$$3\theta=-\frac{\pi}{2}i+\ln(\frac{\mp 7\sqrt{2}+\sqrt{64\pm 98}}{8}) \tag{94}$$

$$\theta=\frac{4n-1}{6}\pi i+\frac{1}{2}\ln 2, n=0,1,2,... \tag{95}$$

可知：

$$Y_1=\cosh(-\frac{\pi}{6}i+\ln\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{96}$$

$$Y_2=\cosh(\frac{3\pi}{6}i+\ln\sqrt{2})=\frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{97}$$

$$Y_3=\cosh(\frac{7\pi i}{6}+\ln\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i \tag{98}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1=(\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i=\frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) \tag{99}$$

$$X_2=\frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}i=-\frac{1}{3} \tag{100}$$

$$X_3=(-\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3}i=\frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) \tag{101}$$

利用平移 $x=\mathrm{X}-\frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1=\frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{102}$$

$$x_2=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-1 \tag{103}$$

$$x_3=\frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{104}$$

(Ⅳ)若改令$Y=\sinh(\theta)$

即 $\frac{2}{3S^2}=\frac{3}{4}$，$S=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，可將上式轉化成$Y^3+\frac{3}{4}Y=\pm\frac{7\sqrt{2}}{32}$

原式變為：

$$\sinh(3\theta)=\mp\frac{7\sqrt{2}}{8} \tag{105}$$

則：

$$3\theta=\ln(\frac{\pm 7\sqrt{2}+\sqrt{64\mp 98}}{8}) \tag{106}$$

$$\theta=\frac{2n}{3}\pi i-\ln\sqrt{2},n=0,1,2,... \tag{107}$$

可知：

$$Y_1=\sinh(0-\ln\sqrt{2})=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{108}$$

$$Y_2=\sinh(\frac{2\pi i}{3}-\ln\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{6}}{8}i \tag{109}$$

$$Y_3=\sinh(\frac{4\pi}{3}-\ln\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{3\sqrt{6}}{8}i \tag{110}$$

利用複數伸縮X=SY可得知：

$$X_1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{1}{3} \tag{111}$$

$$X_2 = (\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{6}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) \tag{112}$$

$$X_3 = (\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{6}}{8}i)\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) \tag{113}$$

利用平移 $x = \mathrm{X} - \frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \tag{114}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(1+3\sqrt{3}i) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{115}$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(1-3\sqrt{3}i) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{116}$$

上述的例題，以四種方式均得到相同的結果。

以上三例，均為實係數方程式透過平移及複數伸縮操作求其三個根，

故另舉一複數係數方程式，以供學習與理解此方法。

範例四、 $x^3+(-2-i)x^2+(2+2i)x+(0-2i)=0$

首先令 $x=X-\frac{a}{3}=X-\frac{(-2-i)}{3}$ 代入上式

$$[x-\frac{(-2-i)}{3}]^3-6[x-\frac{(-2-i)}{3}]^2+11[x-\frac{(-2-i)}{3}]-6=0 \quad (117)$$

化簡後得：

$$X^3+(1+\frac{2}{3}i)X+(\frac{14}{27}-\frac{22}{27}i)=0 \quad (118)$$

令 $X=\mathrm{S}Y$，可得：

$$Y^3+(\frac{3+2i}{3})\frac{Y}{S^2}=(\frac{22i-14}{27})\frac{1}{S^3} \quad (119)$$

假設 $(\frac{3+2i}{3})\frac{1}{\mathrm{S}^2}=\frac{-3}{4}$，則 $\mathrm{S}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3-2i}=\pm(0.366834-1.21157i)$

可將上式轉化成

$$Y^3-\frac{3}{4}Y=\mp\frac{7-11i}{4\sqrt{(-3-2i)^3}} \quad (120)$$

(I)令 $Y=\cos(\theta)$，則原式變為：

$$\cos(3\theta)=-\frac{7-11i}{\sqrt{(-3-2i)^3}}=1.81057-0.590524i \quad (121)$$

則：

$$3\theta=0.363846+1.28004i \quad (122)$$

$$\theta=\frac{2n\pi}{3}+(0.1212282+0.42668i),n=0,1,2,... \quad (123)$$

可知：

$$Y_1 = \cos(0.121282 + 0.42668i) = 1.08439 - 0.0532024i \quad (124)$$

$$Y_2 = \cos(2.21568 + 0.42668i) = -0.656655 - 0.351431i \quad (125)$$

$$Y_3 = \cos(4.31007 + 0.42668i) = -0.427737 + 0.404634i \quad (126)$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1 = (1.08439 - 0.0532024i) \times (0.366834 - 1.21157i) = 0.333333 - 1.333333i$$
$$X_2 = (-0.656655 - 0.351431i) \times (0.366834 - 1.21157i) = -0.666667 + 0.666667i$$
$$X_3 = (-0.427737 + 0.404634i) \times (0.366834 - 1.21157i) = 0.333333 + 0.666667i$$

利用平移 $x = \mathrm{X} - \dfrac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1 = (0.333333 - 1.333333i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 - i \quad (127)$$

$$x_2 = (-0.666667 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 0 + i \quad (128)$$

$$x_3 = (0.333333 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 + i \quad (129)$$

(Ⅱ)若改令 $Y = \sin(\theta)$ ，則原式變為：

$$\sin(3\theta) = \frac{7 - 11i}{\sqrt{(-3 - 2i)^3}} = -1.81057 + 0.590524i \quad (130)$$

則：

$$3\theta = -1.20695 + 1.28004i \quad (131)$$

$$\theta = \frac{2n\pi}{3} + (-0.402317 + 0.42668i), n = 0,1,2,... \quad (132)$$

可知：

$$Y_1 = \sin(-0.402317 + 0.42668i) = -0.427737 - 0.404634i \quad (133)$$

$$Y_2 = \sin(1.69208 + 0.42668i) = 1.08439 - 0.0532024i \quad (134)$$

$$Y_3 = \sin(3.78647 + 0.42668i) = -0.656655 - 0.351431i \tag{135}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1 = (-0.427737 - 0.404634i) \times (0.366834 - 1.21157i) = 0.333333 + 0.666667i$$
$$X_2 = (1.08439 - 0.0532024i) \times (0.366834 - 1.21157i) = 0.333333 - 1.33333i$$
$$X_3 = (-0.656655 - 0.351431i) \times (0.366834 - 1.21157i) = 0.333333 + 0.666667i$$

利用平移 $x = \mathrm{X} - \frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1 = (0.333333 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 + i \tag{136}$$

$$x_2 = (0.333333 - 1.333333i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 - i \tag{137}$$

$$x_3 = (-0.666667 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 0 + i \tag{138}$$

(Ⅲ)若改令 $Y = \cosh(\theta)$ ，則原式變為：

$$\cos(3\theta) = -\frac{7 - 11i}{\sqrt{(-3 - 2i)^3}} = 1.81057 - 0.590524i \tag{139}$$

則：

$$3\theta = 1.28004 - 0.363846i \tag{140}$$

$$\theta = \frac{2n\pi i}{3} + (0.42668 - 0.121282i), n = 0,1,2,... \tag{141}$$

可知：

$$Y_1 = \cosh(0.42668 - 0.121282i) = 1.08439 - 0.0532024i \tag{142}$$

$$Y_2 = \cosh(0.42668 + 1.97311i) = -0.427737 + 0.404634i \tag{143}$$

$$Y_3 = \cosh(0.42668 + 4.06751i) = -0.656655 - 0.351431i \tag{144}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1=(1.08439-0.0532024i)\times(0.366834-1.21157i)=0.333333-1.333333i$$
$$X_2=(-0.427737+0.404634i)\times(0.366834-1.21157i)=0.333333+0.666667i$$
$$X_3=(-0.656655-0.351431i)\times(0.366834-1.21157i)=-0.666667+0.666667i$$

利用平移 $x=\mathrm{X}-\dfrac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1=(0.333333-1.333333i)-(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)\cong 1-i \tag{145}$$

$$x_2=(0.333333+0.666667i)-(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)\cong 1+i \tag{146}$$

$$x_3=(-0.666667+0.666667i)-(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)\cong 0+i \tag{147}$$

(Ⅳ)若改令 $Y=\sinh(\theta)$

即 $\dfrac{2}{3\mathrm{S}^2}=\dfrac{3}{4}$，$\mathrm{S}=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3+2i}$，可將上式轉化成 $Y^3-\dfrac{3}{4}Y=\mp\dfrac{7-11i}{4\sqrt{(3+2i)^3}}$

則原式變為：

$$\sinh(3\theta)=-\frac{7-11i}{\sqrt{(3+2i)^3}}=0.590524+1.81057i \tag{148}$$

則：

$$3\theta=1.28004+1.20695i \tag{149}$$

$$\theta=\frac{2n\pi}{3}i+(1.28004+1.20695i),n=0,1,2,... \tag{150}$$

可知：

$$Y_1=\sinh(0.42668+0.402317i)=0.404634+0.427737i \tag{151}$$

$$Y_2=\sinh(0.42668+2.49671i)=-0.351431+0.656655i \tag{152}$$

$$Y_3=\sinh(0.42668+4.59111i)=-0.0532024-1.08439i \tag{153}$$

利用複數伸縮 X=SY 可得知：

$$X_1 = (0.404634 + 0.427737i) \times (1.21157 + 0.366834i) = 0.333333 + 0.666667i$$
$$X_2 = (-0.351431 + 0.656655i) \times (1.21157 + 0.366834i) = -0.666667 + 0.666667i$$
$$X_3 = (-0.0532024 - 1.08439i) \times (1.21157 + 0.366834i) = 0.333333 - 1.33333i$$

利用平移 $x = \mathrm{X} - \frac{a}{3}$ 可得知：

$$x_1 = (0.333333 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 + i \tag{154}$$

$$x_2 = (-0.666667 + 0.666667i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 0 + i \tag{155}$$

$$x_3 = (0.333333 - 1.33333i) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i) \cong 1 + i \tag{156}$$

綜整以上四例，依照 $\cos(\theta)$ 、$\sin(\theta)$ 、$\cosh(\theta)$ 與 $\sinh(\theta)$ 其求解過程與三個根得平移及複數伸縮操作，並且整理成表 2～5。

四、Mathematica 程式

4.1 Mathematica 基本繪圖指令

f[x]//Simplify
最常用的化簡指令，將數學式化成較精簡的式子

ComplexExpand[f[x]]
將 f[x]以複數的型式展開。

ListPlot[{x,y}]：
畫出{x,y}的點在圖形上。

PlotStyle→{Style1,Style2,…}：
函數圖形的格式設定，如：顏色、出圖範圍、圖形的寬度等。

RGBColor[R,G,B]：
設定顏色，以紅、綠、藍三色間的比例表示。

Thickness[數值]：
設定圖形軌跡的寬度。

PlotRange→{{min,max},{min,max}}：
設定出圖範圍，前為 x 軸，後者為 y 軸。

4.2 程式編寫流程

1. 定義函數 $f(x)$, 並給定係數。

$$a := -2 - i$$
$$b := 2 + 2i$$
$$c := -2i$$
$$f[x\_] := (x)^3 + a(x)^2 + b(x) + c$$

2. 利用平移概念展開 $f(x)$，並求係數。

$$x := X - \frac{a}{3}$$
$$f\left[X - \frac{a}{3}\right] \text{ // Simplify}$$
$$q := -\frac{a^2}{3} + b$$
$$r := \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

3. 求出伸縮係數，並求出三倍角值。

$$s := \sqrt{-\frac{4}{3} * q}$$
$$z := -\frac{4r}{s^3} \text{ // FullSimplify}$$

4. 利用反三角函數，求出角度在逆推求解，並畫圖。

$$\text{ComplexExpand}\left[\theta 1 = \frac{1}{3.}\ \text{ArcCos}[z]\right] \text{ // FullSimplify}$$
$$\text{ComplexExpand}\left[f[\theta\_] = \text{Cos}[\theta 1] * \frac{1.}{1} \text{ // FullSimplify}\right]$$
$$\text{ComplexExpand}\left[X1 = f[\theta 1] * s * \frac{1.}{1} \text{ // FullSimplify}\right]$$
$$\text{ComplexExpand}\left[x1 = X1 - \frac{a}{3.} \text{ // FullSimplify}\right]$$

4.3 程式範例

以範例三為例，其程式如下：

```
a := 2
b := 2
c := 1
f[X_] := (X)^3 + a (X)^2 + b (X) + c
x := X - a/3
f[X - a/3] // Simplify
q := -a^2/3 + b
r := 2a^3/27 - a b/3 + c
s := Sqrt[-4/3 * q]
z := -4r/s^3 // FullSimplify
ComplexExpand[θ1 = 1/3. ArcCos[z]] // FullSimplify
ComplexExpand[θ2 = 1/3 * ArcCos[z] + 2π/3.] // FullSimplify
ComplexExpand[θ3 = 1/3 * ArcCos[z] + 4π/3.] // FullSimplify
ComplexExpand[f[θ_] = Cos[θ1] * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[g[θ_] = Cos[θ2] * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[h[θ_] = Cos[θ3] * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[X1 = f[θ1] * s * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[X2 = g[θ2] * s * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[X3 = h[θ3] * s * 1./1 // FullSimplify]
ComplexExpand[x1 = X1 - a/3. // FullSimplify]
ComplexExpand[x2 = X2 - a/3. // FullSimplify]
ComplexExpand[x3 = X3 - a/3. // FullSimplify]
z7 := ListPlot[{{Re[x1], Im[x1]}}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}},
  PlotStyle → {PointSize[0.05], RGBColor[1, 0, 0]}, DisplayFunction → Identity]
z8 := ListPlot[{{Re[x2], Im[x2]}}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}},
  PlotStyle → {PointSize[0.05], RGBColor[0, 1, 0]}, DisplayFunction → Identity]
z9 := ListPlot[{{Re[x3], Im[x3]}}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}},
  PlotStyle → {PointSize[0.05], RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction → Identity]
Show[z7, z8, z9, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

五、結語

本專題是將一個一元三次方程式求解的老問題，經由複變函數求解，透過此方法可以發現下列幾點。把一元三次方程式平移後，假如其一次項係數假如為 0 時，雖不能用三倍角公式轉換方程式，但卻為高中複數所學的棣美佛定理，從範例一與表 1 均可以看出。為探討判別式，本專題進而利用雙曲正餘弦之三倍角公式，亦得到相同的答案並整理於表 2~表 5，其中發現由於 $\sinh 3\theta$ 型式操作過程型式不同的關係，會產生虛部，致使伸縮過程中的數值會有些許不同，但不會影響其根的答案。從表 5 與表 2~4 的圖中比較便可明顯的看出。可知，$\sinh 3\theta$ 在實係數求解中，數值運算有些許複雜；但在某些複數係數時，反而會比迅速。然而在判別式的地方，本專題也利用複變函數來推導判別式，其結果與[9]比較，乍看之下雖型式不同，但透過倒數並將其整理後，可知兩種方法之等效性。更可確定此判別式的正確性。此外，利用 Mathematica 進行運算，將其係數改變後變可求出其根與平移及複變伸縮之圖形，方便了解其根的值與操作手法的圖形變化。

正所謂條條大路通羅馬，以不同的角度來看，會有不同的解決之道。雖以新方法解決老問題，卻有不同的收穫與體會，只要善用手邊的工具，必能走出自己的一片天。此外，在複變教學上，利用一個熟

悉的數學問題來學習複變函數，相信必定可以提高學生學習的興趣，在老師教學上能有所助益，成為一套好的教學教材。也希望大家在研究的領域上找出更多的出路，也體會到更多的樂趣。

六、參考文獻

[1]海大河工工數 Website 課程相關資訊，http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/ ， 2007。

[2]陳正宗，複變函數講義，海洋大學，基隆，2006。

[3] 陳正宗，國立台灣海洋大學教學優良教師經驗分享，海洋大學，基隆，2001。

[4]陳正宗，工程數學教學經驗談，工程力學與數學創意教學研討會，台北，2004。

[5]陳正宗，工程數學教學拾趣，數學傳播，第 31 卷第 4 期，pp.18~37 ，2007。

[6]Brown J W and Churchill R V, *Complex variables and applications*, Seventh Edition, McGraw-Hill, 2003.

[7]繆龍驥，從實數到複數，數學傳播，第 1 卷第 1 期， pp.6~7， 1976。

[8]楊玉成，三次方程式的解法，數學傳播，第 7 卷第 2 期， pp.90~92，1983。

[9]李勝利，由三次函數的圖形探討三次方程式根的性質，數學傳播 11 卷 1 期， pp.70~71， 1987。

[10]曾健威、夏芷惠、黄奕妮， 從解三次方程到構作正七邊形，數學傳播 30 卷 1 期， pp.81~84， 2006。

[11]Timoshenko Goodier, *Theory of elasticity,* Third Edition, McGraw-Hill, 1970.

表 2. $\cos(3\theta)$ 求解過程示意圖

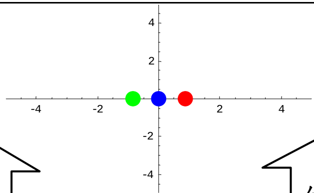
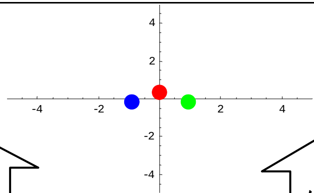
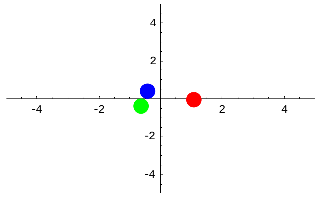
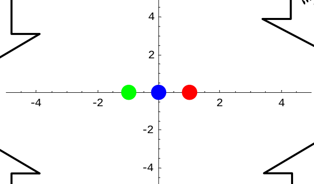
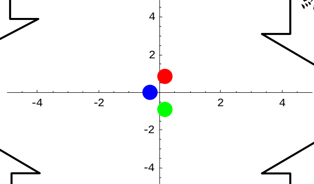
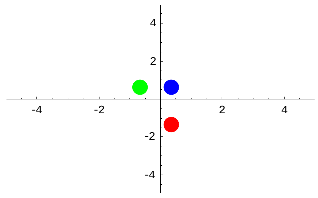
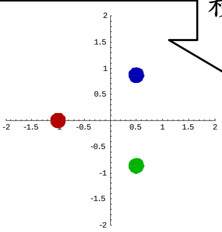
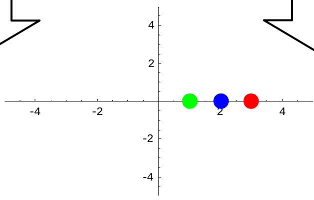
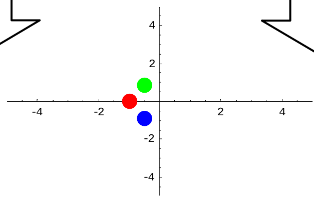
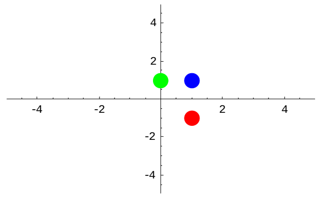
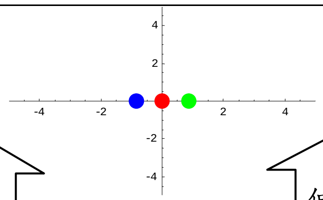
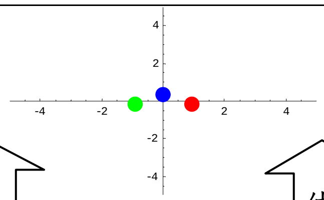
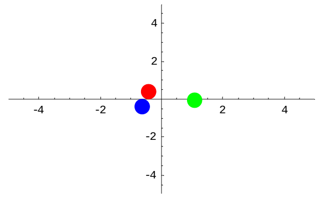
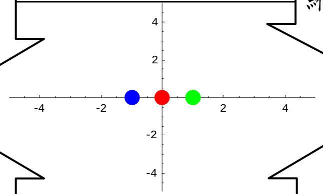
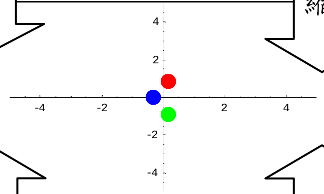
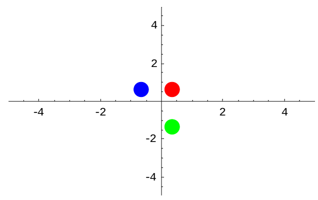
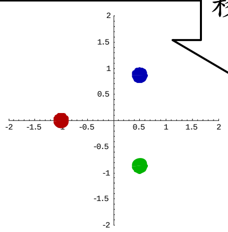
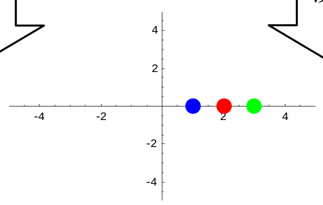
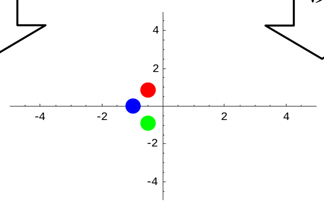
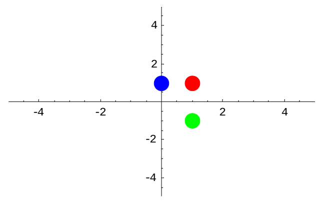
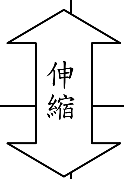
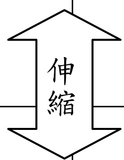
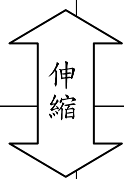
	實係數一元三次方程式			複數一元三次方程式
	範例一	範例二	範例三	範例四
	$x^3+1=0$	$x^3-6x^2+11x-6=0$	$x^3+2x^2+2x+1=0$	$x^3+(-2-i)x^2+(2+2i)x+(0-2i)=0$
(a,b,c)	$(0,0,1)$	$(-6,11,-6)$	$(2,2,1)$	$(-2-i,2+2i,-2i)$
(Q,R)	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(\frac{2}{3},\frac{7}{27})$	$(\frac{3+2i}{3},\frac{22i-14}{27})$
S	NA	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3-2i}$
$\cos(3\theta)$	-1	0	$\mp 7\frac{\sqrt{2}}{8}i$	$\mp\frac{7-11i}{\sqrt{(-3-2i)^3}}$
D	∞	0	$-\frac{49}{32}$	NA
	一實根與兩共軛虛根	三相異實根	一實根與兩共軛虛根	NA
Y	NA 伸縮	 伸縮	 伸縮	
X	NA 平移	 平移	 平移	
x				

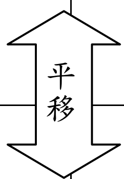
表 3. $\sin(3\theta)$ 求解過程示意圖

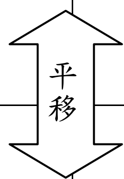
<table>
<tr><td></td><td colspan="3">實係數一元三次方程式</td><td>複數一元三次方程式</td></tr>
<tr><td></td><td>範例一</td><td>範例二</td><td>範例三</td><td>範例四</td></tr>
<tr><td></td><td>$x^3+1=0$</td><td>$x^3-6x^2+11x-6=0$</td><td>$x^3+2x^2+2x+1=0$</td><td>$x^3+(-2-i)x^2+(2+2i)x+(0-2i)=0$</td></tr>
<tr><td>(a,b,c)</td><td>$(0,0,1)$</td><td>$(-6,11,-6)$</td><td>$(2,2,1)$</td><td>$(-2-i,2+2i,-2i)$</td></tr>
<tr><td>(Q, R)</td><td>(0,1)</td><td>(-1,0)</td><td>$(\frac{2}{3},\frac{7}{27})$</td><td>$(\frac{3+2i}{3},\frac{22i-14}{27})$</td></tr>
<tr><td>S</td><td>NA</td><td>$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$</td><td>$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i$</td><td>$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3-2i}$</td></tr>
<tr><td>$\sin(3\theta)$</td><td>-1</td><td>0</td><td>$\pm 7\frac{\sqrt{2}}{8}i$</td><td>$\pm\frac{7-11i}{\sqrt{(-3-2i)^3}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D</td><td>∞</td><td>0</td><td>$-\frac{49}{32}$</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>一實根與兩共軛虛根</td><td>三相異實根</td><td>一實根與兩共軛虛根</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>NA</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>X</td><td>NA</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>











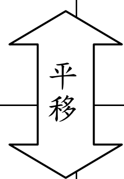


表 4. $\cosh(3\theta)$ 求解過程示意圖

	實係數一元三次方程式			複數一元三次方程式
	範例一	範例二	範例三	範例四
	$x^3+1=0$	$x^3-6x^2+11x-6=0$	$x^3+2x^2+2x+1=0$	$x^3+(-2-i)x^2+(2+2i)x+(0-2i)=0$
(a,b,c)	$(0,0,1)$	$(-6,11,-6)$	$(2,2,1)$	$(-2-i,2+2i,-2i)$
(Q,R)	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(\frac{2}{3},\frac{7}{27})$	$(\frac{3+2i}{3},\frac{22i-14}{27})$
S	NA	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3-2i}$
$\cosh(3\theta)$	-1	0	$\mp 7\frac{\sqrt{2}}{8}i$	$\mp\frac{7-11i}{\sqrt{(-3-2i)^3}}$
D	∞	0	$-\frac{49}{32}$	NA
	一實根與兩共軛虛根	三相異實根	一實根與兩共軛虛根	NA

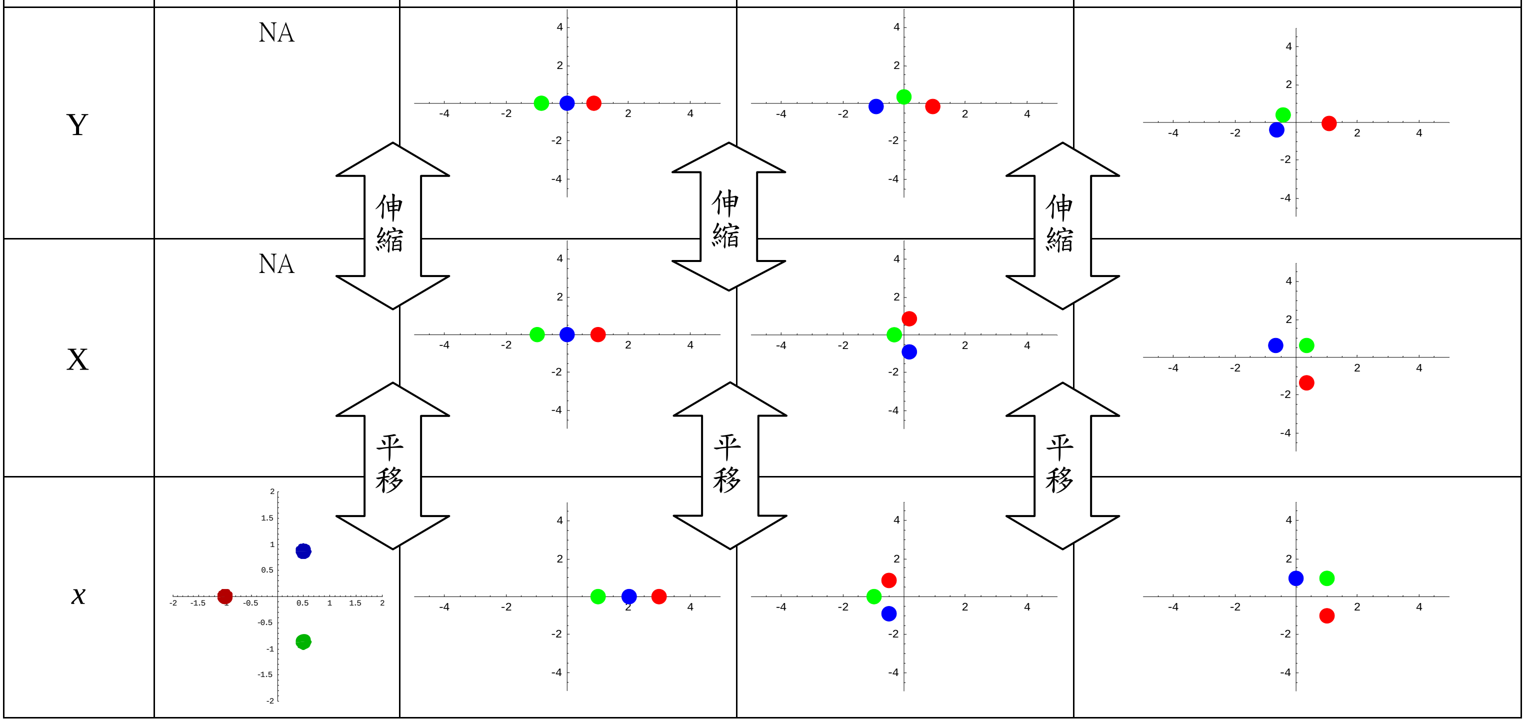
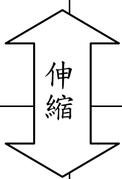
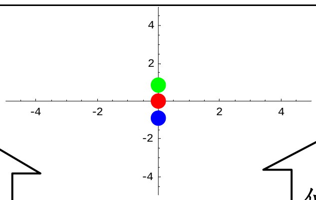
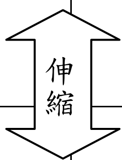
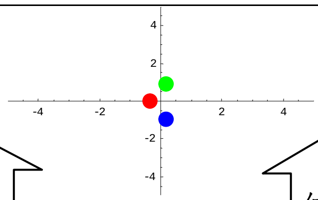
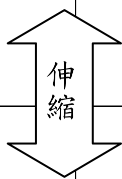
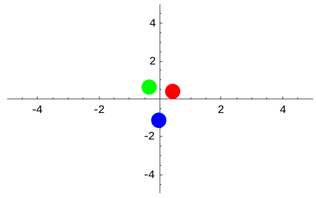
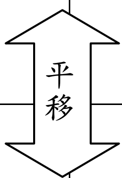
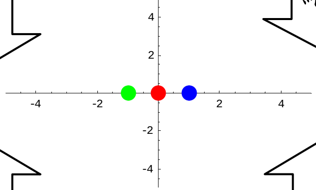
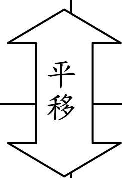
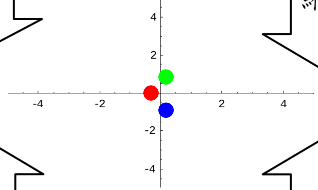
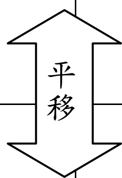
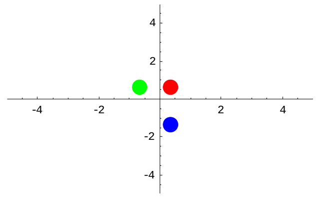


表 5. $\sinh(3\theta)$ 求解過程示意圖

	實係數一元三次方程式			複數一元三次方程式
	範例一	範例二	範例三	範例四
	$x^3+1=0$	$x^3-6x^2+11x-6=0$	$x^3+2x^2+2x+1=0$	$x^3+(-2-i)x^2+(2+2i)x+(0-2i)=0$
(a,b,c)	$(0,0,1)$	$(-6,11,-6)$	$(2,2,1)$	$(-2-i,2+2i,-2i)$
(Q,R)	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(\frac{2}{3},\frac{7}{27})$	$(\frac{3+2i}{3},\frac{22i-14}{27})$
S	NA	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}i$	$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{3+2i}$
$\sinh(3\theta)$	-1	0	$\mp 7\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\mp\frac{7-11i}{\sqrt{(3+2i)^3}}$
D	∞	0	$-\frac{49}{32}$	NA
	一實根與兩共軛虛根	三相異實根	一實根與兩共軛虛根	NA
Y	NA 	 	 	
X	NA 	 	 	
x