张传增同志指正

胡海昌赠 92年6月

中国科学

1992 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

平面调和函数的充要的边界积分方程

胡海昌

(中国空间飞行器总体设计部，北京 100086)

摘　要

本文发现，以往习用的平面调和函数的两种边界积分方程不是充要的，其原因是一个实际上并不能包括全部调和函数的边界积分表达式误解为能如此．本文改正了这个表达式，并进而导出了充要式直接变量和间接变量的边界积分方程

关键词：调和函数的边界值问题，边界积分方程-边界元法

用边界积分方程-边界元方法求解弹性力学以及其他物理或工程问题，近年来得到了蓬勃的发展．但是边界积分方程的充要性问题一直未受到足够的重视．文献[1]首次提出了调和函数的边界积分方程的充要条件．本文应用这个条件考查了两种习用的平面调和函数的边界积分方程，发现它们不是充要的，因而并非在一切情况下都可以应用．文献[2]也曾指出过，有些平面调和函数的边界积分方程有时会出问题．但因未能找到根本原因，故未能从根本上加以改进．本文发现，出问题的根本原因在于把一个在空间问题中能包括全部调和函数的边界积分公式(单层源公式)，不加证明地移植于平面问题．而事实上这个移植来的公式并不能包括全部调和函数．本文证明了，只要在上述公式后加一个常数项，便能达到预期的目的．这一改进还使平面调和函数的单层源具有客观性．我们依据这个新的平面调和函数的一般表达式，建立了两种(直接变量和间接变量各一种)新的边界积分方程，它们都是充要的．

一、任意平面调和函数的边界积分表示

考虑平面 (x,y) 上有一个有限区域 Ω，Ω 的边界为 B．平面调和函数的基本解 G，即单位点源所引起的场，满足下列方程

$$\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}), \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}$ 是 (x,y)，(ξ,η) 的缩写，而 (ξ,η) 是奇点的坐标、基本解常取为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{a}, \tag{1.2}$$

其中

$$R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \tag{1.3}$$

而 a 是可任意选定的一个距离标尺．所以引进距离标尺，是因为对数是一个超越函数，而超越

本文 1991 年 2 月 4 日收到．

函数的自变量必须是无量纲的．平面调和函数和空间调和函数这两种基本解有两个很大的区别．一是可以要求后者在无穷远处等于零，而前者无法做到．二是后者可以用带量纲的坐标计算，而前者必须首先无量纲化．

不少文献（如文献[3,4]）自觉或不自觉地认为：Ω 内的调和函数 $H(\boldsymbol{x})$ 总可以表示为

$$H(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi,\ \boldsymbol{\xi}\in B_\xi,\tag{1.4}$$

这里 B_ξ 是指由 (ξ,η) 点组成的边界，而 B 是指由 (x,y) 点组成的边界；μ 是适当的单层密度．(1.4)式虽然与空间调和函数的对应公式

$$H(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\frac{\mu(\xi)}{R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}dB_\xi\tag{1.5}$$

十分相似，但正如文献[2]所指出的，却不一定能成立．文献[2]举出了一个实例，当 Ω 为以原点为圆心、(1.2)式中的 a 为半径的圆形区域时，(1.4)式给出

$$H(\boldsymbol{0})=-\frac{1}{2\pi}\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\ln\frac{a}{a}dB_\xi=0.\tag{1.6}$$

此式表明，在此种情况下(1.4)式不包含 $H(\boldsymbol{0})\neq 0$ 的调和函数．文献[2]还指出，某些平面调和函数的边界积分方程有时出问题，与上述误解有关．但是他们没有指出如何有效地纠正这一错误．

本文指出，对于平面调和函数，(1.4)式应改正为

$$H(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\mu(\xi)G(\boldsymbol{x},\xi)dB_\xi+C,\tag{1.7}$$

式中 C 是一个待定常数，而 $\mu(\boldsymbol{\xi})$ 可限制在下列范围内

$$\int_{B_\xi}\mu(\xi)dB_\xi=0.\tag{1.8}$$

我们先从物理上来论证(1.7)，(1.8)式的合理性．人们常把 μ 理解为单层密度，认为它有物理意义．如果 μ 真的有物理意义，那么它必定是客观的，即 H 与 μ 间有一个一一对应的关系．先来检查一下给定一个 μ 是否只得到一个 H．在 G 中有一个可由主观随意选定的距离标尺 a．设想 a 取 a_1 和 a_2 两值，对应的 G 记为 G_1 和 G_2：

$$G_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{a_i},\quad i=1,2.\tag{1.9}$$

于是 μ 的客观性，要求用 G_1 或用 G_2 算出的 H 相等，即

$$\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})[G_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})-G_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]dB_\xi=0.\tag{1.10}$$

注意到

$$G_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})-G_2(\boldsymbol{x},\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a_1}{a_2}=\text{常数},\tag{1.11}$$

从(1.10)式即可导出(1.8)式．可见，只有在(1.8)式成立的前提下 μ 才具有客观性，才可能具有物理意义．下面我们称(1.8)式为客观性条件．

下面再来证明，任给一个 $H(\boldsymbol{x})$ 后一定可以找到唯一的 $\mu(\boldsymbol{\xi})$ 使(1.7)，(1.8)式成立．本文限于考虑 Ω 是有限的情况，但允许 Ω 是多联通的．Ω 的内外边界的集合记为 B．Ω 的补域（全平面中扣除 Ω 和 B 后所剩下的区域）记为 Ω'．如果 Ω 是多联通的，那末 Ω' 包含不相联通的几块．

在Ω内任给一个调和函数 $H(\boldsymbol{x})$ 后,可根据下列条件在Ω'内确定一个调和函数 $H'(\boldsymbol{x})$:

$$\text{在}\ \Omega'\ \text{内}:\ \nabla^2 H' = 0, \tag{1.12a}$$

$$\text{在}\ B\ \text{上}:\ H' = H, \tag{1.12b}$$

$$\text{在}\ \infty\ \text{处}\quad H' \to C, \tag{1.12c}$$

式中C是待定的未知常数.

为使公式简明,在边界B上的函数H, H'以及它们的法向导数分别记为$\bar{H}$, $\bar{H}_n$; $\bar{H}'$, $\bar{H}'_n$.

命基本解G中的奇点(ξ,η)落在Ω内. 在Ω内对H和G两个函数应用 Green 公式,得到

$$H(\boldsymbol{\xi}) = \int_B \left(\bar{H}_n G - \bar{H}\frac{\partial G}{\partial n} dB\right). \tag{1.13}$$

以坐标原点为圆心在无穷远处作一很大的圆周B_∞. 在B_∞内的Ω'区域中对H'和G应用 Green 公式,因G的奇点不在这个区域内,故有

$$\int_B \left(\bar{H}'_n G - \bar{H}'\frac{\partial G}{\partial n}\right) dB = \int_{B_\infty}\left(\frac{\partial H'}{\partial n} G - H'\frac{\partial G}{\partial n}\right) dB. \tag{1.14}$$

在∞处:

$$\begin{aligned} &H' \to C,\quad \frac{\partial H'}{\partial n} \to o\left(\frac{1}{r}\right),\\ &G \to -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{a},\quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \to -\frac{1}{2\pi r}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

其中(r,θ)为极坐标. 这样(1.14)式的右端化为

$$\int_{B_\infty}\left(\frac{\partial H'}{\partial n} G - H'\frac{\partial G}{\partial n}\right) dB = \int_0^{2\pi} C\left(\frac{1}{2\pi r}\right) r d\theta = C. \tag{1.16}$$

于是(1.14)式化为

$$\int_B \left(\bar{H}'_n G - \bar{H}'\frac{\partial G}{\partial n}\right) dB = C. \tag{1.17}$$

将此式的左端移到右端,然后将它加入到(1.13)式,得到

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\xi}) &= \int_B \left\{(\bar{H}_n - \bar{H}'_n)G - (\bar{H} - \bar{H}')\frac{\partial G}{\partial n}\right\} dB + C\\ &= \int_B (\bar{H}_n - \bar{H}'_n) G dB + C. \end{aligned} \tag{1.18}$$

命

$$\mu(x) = \bar{H}_n - \bar{H}'_n. \tag{1.19}$$

于是(2.18)式可写成为

$$H(\boldsymbol{\xi}) = \int_B \mu(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) dB + C. \tag{1.20}$$

注意到 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 是$\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}$的对称的函数,便可知(1.20)式与(1.7)式等价. 剩下需要证明的是由(1.19)式确定的μ满足(1.8)式. 这个证明很简单,只要注意到(1.19)式中的两项分别满足(1.8)式:

$$\int_B \bar{H}_n dB = 0,\quad \int_B \bar{H}'_n dB = \int_{B_\infty}\frac{\partial H'}{\partial r} dB = 0. \tag{1.21}$$

二、充要的间接变量边界积分方程

考虑如下的平面调和函数的典型的混合边界值问题

$$\text{在}\Omega\text{内：}\nabla^2\varphi=0, \tag{2.1a}$$

$$\text{在} B_1 \text{上：}\varphi=\bar{\varphi}, \tag{2.1b}$$

$$\text{在} B_2 \text{上：}\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\bar{\varphi}_n, \tag{2.1c}$$

这里 Ω 仍限于有限区域，而 $B_1\cup B_2=B$.

根据公式(2.7)，φ 可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi+C, \tag{2.2}$$

式中 C 和 μ 是待求的未知量．在(2.2)式中命 $\boldsymbol{x}$ 趋于边界 B. 用边界积分方程理论中惯用的方法可以导出

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial n}=k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}dB_\xi,\quad \boldsymbol{x}\in B, \tag{2.3}$$

式中 k 是已知量，在光滑的边界上 $k=1/2$. 积分号下的记号 $\dot{B}_\xi$ 是指扣除 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 的奇点 ($\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}$) 后所存下的开边界上的 Cauchy 积分．根据(2.2)，(2.3)式以及 μ 应事前满足的条件(1.8)，我们便可得到下列间接变量的边界积分方程

$$\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})dB_\xi=0, \tag{2.4a}$$

$$\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi+C=\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in B_1 \tag{2.4b}$$

$$k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}dB_\xi=\bar{\varphi}_n(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in B_2. \tag{2.4c}$$

这组方程正好可确定未知的 C 和 μ. 所以这组方程不仅是充要的，并且是没有多余的．

以往习用的、基于单层密度的间接变量边界积分方程是

$$\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi=\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in B_1, \tag{2.5a}$$

$$k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}dB_\xi=\bar{\varphi}_n(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in B_2. \tag{2.5b}$$

方程(2.5b)与(2.4c)相同，但(2.5a)比(2.4b)少了一个常数 C. 由于缺了这个常数，旧方程组(2.5)有时无解或有多解．文献[2]曾就 Dirichlet 问题指出了这种可能性．本文就一般的混合边界值问题，并从更实用的观点来证明存在这种可能性．为此，考虑如下的特殊问题：

$$\text{在} B_1 \text{上：}\bar{\varphi}=1;\quad \text{在} B_2 \text{上：}\bar{\varphi}_n=0. \tag{2.6}$$

对此问题旧方程组是

$$\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi=1,\quad \boldsymbol{x}\in B_1, \tag{2.7a}$$

$$k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}dB_\xi=0,\quad \boldsymbol{x}\in B_2. \tag{2.7b}$$

如果对于某一选定的距离标尺 a 此方程无解，那就已说明旧方程组不符合实际情况了．因此

我们假定,对于这个 a 方程(2.7)有解. 把此解记为 $\mu=\lambda$. 现在再将距离标尺从 a 改为 b, 并把相应的基本解记为 $G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$. 这样有

$$G=G_0-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{b}{a}. \tag{2.8}$$

将此式及 $\mu=\lambda$ 代入(2.7)式,得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_\xi}\lambda(\xi)G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi-\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=1,\quad \boldsymbol{x}\in B_1,\\&k\lambda(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\lambda(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dB_\xi=0,\quad \boldsymbol{x}\in B_2,\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中:

$$Q=\int_{B_\xi}\lambda(\boldsymbol{\xi})dB_\xi. \tag{2.10}$$

在本节的最后将证明 $Q\neq 0$. 由此可知,当

$$-\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=1,\quad 即\ b=ae^{-\frac{2\pi}{Q}} \tag{2.11}$$

时,$\mu=\lambda$ 便是齐次方程

$$\begin{aligned}&\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi=0,\quad \boldsymbol{x}\in B_1,\\&k\mu(x)+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\xi)\frac{\partial G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dB_\xi=0,\quad \boldsymbol{x}\in B_2\end{aligned} \tag{2.12}$$

的非零解. 齐次方程有非零解,对应的非齐次方程(2.5)无解或有不唯一的解. 这显然不符合实际情况.

下面再对 Neumann 问题做些补充. 对于这类问题,新旧方程组分别简化为

$$\int_{B_\xi}\mu(\xi)dB_\xi=0, \tag{2.13a}$$

$$k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dB_\xi=\bar{\varphi}_n,\quad \boldsymbol{x}\in B, \tag{2.13b}$$

$$k\mu(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dB_\xi=\bar{\varphi}_n,\quad \boldsymbol{x}\in B. \tag{2.14}$$

不要由于两者都不含常数 C, 并且 (2.13b) 与 (2.14) 式相同而认为新旧方程组是等价的. 旧方程(2.14)有解,但不唯一. 它的解可表示为

$$\mu=\mu_p+\alpha\mu_0, \tag{2.15}$$

式中 μ_p 是方程(2.14)的某一特解,α 是任意常数,而 μ_0 是齐次方程

$$k\mu_0(\boldsymbol{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mu_0(\xi)\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}dB_\xi=0,\quad \boldsymbol{x}\in B \tag{2.16}$$

的非零解. 将(2.15)式代入(1.4)式,得到待求的调和函数

$$H(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\mu_p(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi+\alpha\int_{B_\xi}\mu_0(\xi)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi. \tag{2.17}$$

对于 Neumann 问题,调和函数中有,且只有常数项不确定,所以 μ_0 应能满足下列条件

$$\int_{B_\xi}\mu_0G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi=1. \tag{2.18}$$

但是不幸的是当距离标尺取得不适当时，方程(2.16)，(2.18)不能同时成立。证明步骤和前面用过的相同，这里不再重复。

对于新方程组，从方程(2.13b)同样可得到(2.15)式。但此时将(2.15)式代入(2.13a)式，即可唯一地决定α：

$$\alpha=-\int_{B_\xi}\mu_p(\boldsymbol{\xi})dB_\xi\Big/\int_{B_\xi}\mu_0(\boldsymbol{\xi})dB_\xi \tag{2.19}$$

在新方程组中，μ总是唯一的，反映了μ的客观性。$H(\boldsymbol{x})$中所需的不定常数由(1.7)式提供。

现在回过头来证明 $Q\neq 0$ [见(2.10)式]，从边界条件(2.6)易知待求的调和函数是

$$\varphi(\boldsymbol{x})=1,\ x\in\Omega. \tag{2.20}$$

利用求得的 $\mu=\lambda$，在Ω的补域Ω'内也可确定一个调和函数φ'如下

$$\varphi'(\boldsymbol{x})=\int_{B_\xi}\lambda(\boldsymbol{\xi})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dB_\xi,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega'. \tag{2.21}$$

这个φ'在B上与φ相等，因而有

$$\text{在}B\text{上：}\ \varphi'=1. \tag{2.22a}$$

如果 $Q=0$，那末

$$\text{在}\infty\text{处：}\ \varphi'\to 0. \tag{2.22b}$$

但是微分方程理论告诉我们，不存在满足条件(2.22)的平面调和函数，故只能是 $Q\neq 0$。证毕。

三、充要的直接变量边界积分方程

考虑如下的平面调和函数的超定问题：

$$\text{在}\Omega\text{内：}\ \nabla^2\varphi=0, \tag{3.1a}$$

$$\text{在}B\text{上：}\ \varphi=\bar\varphi, \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\bar\varphi_n, \tag{3.1c}$$

这里$\bar\varphi$和$\bar\varphi_n$是在B上给定的函数。文献[1]已经证明了，超定问题(3.1)有解的充要条件是：对于所有Ω内的调和函数H，都有

$$\int_B\left(H\bar\varphi_n-\frac{\partial H}{\partial n}\bar\varphi\right)dB=0. \tag{3.2}$$

文献[1]中的证明显然通用于空间调和函数和平面调和函数，所以上述结论不用再作证明了。

第二节中已经证明了，Ω内的调和函数一定可以表示成(1.7)式的形式。现将(1.7)和(2.3)式(其中的φ改为H)代入(3.2)式，得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\int_B G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\bar\varphi_n(\boldsymbol{x})dBdB_\xi-k\int_B\mu(\boldsymbol{x})\bar\varphi(\boldsymbol{x})dB\\&\quad-\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\int_B\bar\varphi(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}dBdB_\xi+C\int_B\bar\varphi_n dB=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

注意到

$$\int_B\mu(\boldsymbol{x})\bar\varphi(\boldsymbol{x})dB=\int_{B_\xi}\mu(\boldsymbol{\xi})\bar\varphi(\boldsymbol{\xi})dB_\xi,$$

(3.3)式可化为

$$\int_{\dot{B}_\xi}\mu(\xi)\left\{-k\bar{\varphi}(\xi)+\int_{\dot{B}}\left[\bar{\varphi}_n(x)G(x,\xi)-\bar{\varphi}(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right]dB\right\}dB_\xi+C\int_B\bar{\varphi}_n dB=0. \tag{3.4}$$

在这个方程中，$\mu(\xi)$ 和 C 是可变的，所以这个方程本质上是个变分方程．如果 $\mu(\xi)$ 可以完全自由地选择，那末从(3.4)式便可得到

$$k\bar{\varphi}(\xi)=\int_{\dot{B}}\left[\bar{\varphi}_n(x)G(x,\xi)-\bar{\varphi}(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right]dB. \tag{3.5}$$

这便是以往文献中习用的直接变量边界积分方程．但在本文中，$\mu(\xi)$ 不完全独立，而需满足客观性条件(1.8)．条件(1.8)本质上是对自变函数 $\mu(\xi)$ 的一种约束．用 Lagrange 乘子法解除此约束，从(3.4)式即可导出

$$k\bar{\varphi}(\xi)=\int_{\dot{B}}\left[\bar{\varphi}_n(x)G(x,\xi)-\bar{\varphi}(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right]dB+\alpha, \tag{3.6}$$

式中 α 是 Lagrange 乘子，是待定常数．方程(3.4)中的 C 是可以任意选取的，由此即可导出

$$\int_B\bar{\varphi}_n(x)dB=0. \tag{3.7}$$

这样导出的新的直接变量边界积分方程是(3.6)和(3.7)式的联立．

与旧方程(3.5)对比，新方程组(3.6)，(3.7)有下列优点：第一，新方程组具有客观性，即它的形式不随距离标尺的改变而改变，而旧方程不具有客观性．第二，更重要的，新方程组适用于各种情况，而旧方程在某些情况下有不该有的不唯一的解．尤其使人为难的是，在把方程(3.5)离散化后，可能又把不唯一的解变成了唯一的解．这样就造成了难于觉察的虚假现象．

为了较具体地指出旧方程(3.5)的问题，我们来考察 Dirichlet 问题．对于这类问题 φ 已知而 φ_n 待求．将已知量移至方程的右端，旧方程(3.5)变为

$$\int_{B_\xi}\bar{\varphi}_n(x)G(x,\xi)dB_\xi=k\bar{\varphi}(x)+\int_{\dot{B}}\bar{\varphi}(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}dB_\xi=\text{已知}, \tag{3.8}$$

第三节中已证明，当距离标尺取得不恰当时，齐次方程

$$\int_{B_\xi}\bar{\varphi}_n(x)G(x,\xi)dB_\xi=0 \tag{3.9}$$

有非零解．故非齐次方程(3.8)的解不唯一．但众所周知，Dirichlet 问题有且只有唯一解．

参 考 文 献

[1] 胡海昌，固体力学学报，**10**(1989)，99.

[2] Jaswon, M. A. & Symm, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press, 1977.

[3] Brebbia, C. A. et al., *Boundary Element Techniques: Theory and Application in Engineering*, Springer-Verlag, 1984 (中译本：龙述尧等译，边界单元法的理论和工程应用，国防工业出版社，1988).

[4] 杜庆华等，边界积分方程方法-边界元法，高等教育出版社，1988.